序 文

本書は、複素関数論、トポロジー、可換環論などの基礎的な知識をもつ、大学4年生から大学院の修士課程の学生を念頭に、複素曲面特異点に関し、基礎的な事柄を解説することを目的としている。とくに、簡単な具体例について特異点解消の計算や、種々の不変量の計算を実行して、実験的数学の面白さを味わうことも主な目的である。本書では、随所に簡単な類似の具体例の計算を多数配置してあるが、それらの計算を読者が再度行うことで、「読者自らが新たな事象の発見を目指せるようになる」ことも意図している。

こうした目的のために、層や層係数コホモロジー群については第8章に付録的に配置する。また、Serreの双対性定理など著名な結果で、他書で証明が容易に見られるものは、結果のみ述べ使用することにする。ただし、証明が簡潔に述べられ具体例の計算に必要なものはできる限り述べる。

複素曲面特異点の研究は、19世紀のF. Kleinの二項正多面体群の不変式の研究に端を発する。しかし、大きく発展するようになったのは、広中平祐の特異点解消定理、E. Brieskornによる特異点リンク(特異点の周辺球面による切り口)としてのエキゾチック球面の発見等の、特異点論における大成果を契機に、2次元に限らず特異点論全般が盛んに研究されるようになった1960年代後半以降である。複素2次元に限っても研究の幅は広く、複素幾何学、代数幾何学、位相幾何学など様々な方面からの成果が得られた。

閉リーマン面であれば位相型は種数 g で決まり、 g を固定すると、その解析構造のなすモジュライ空間も与えられている。しかし、複素曲面特異点では、有理特異点(幾何種数がゼロ)に限っても、その位相型は無限の多様性を持ち、その全容を閉リーマン面論のレベルで解明することからはほど遠い。複素曲面特異点の分野には、未知の数学の芽が数多く眠っている可能性が高いと思われる。

この40年間で複素曲面特異点の研究に起源をもち、今日大きく発展した分野として、高次元特異点の極小モデル、正標数の特異点、Mckay対応、原始形式等の多くの理論がある。複素曲面特異点はそうした数学を産み出した源泉である。複素曲面特異点論自体にも、種々の不変量の関係論、変形論、スプライス商特異点論など多様な発展があり進行している。また、複素正規曲面特異点のリンクは実コンパクト3次元多様体であり、低次元トポロジーや接解幾何と関連した研究も進行中である。さら

ii 序 文

に、本書の第 7 章で述べるリーマン面族との関係については、複素解析でのリーマン面(族)に関する膨大な研究の蓄積があるが、複素曲面特異点論との関係は未開拓であり、将来、興味のもたれるところである。

本書の内容を章ごとに説明する。第 1 章から第 3 章は、第 4 章以降の複素曲面特異点を学ぶための基礎知識として、最低限の知識を解説した。

第 1 章では、最初に複素多様体についての導入を述べる。その後、平面の 1 点を中心としたブローアップを説明し、平面代数曲線特異点に関する特異点解消等について述べ、第 4 章以降の正規曲面特異点に関わる議論の準備をする。

第 2 章では、正規曲面特異点の特異点解消の例外集合上の因子に関する議論を念頭に、正則直線束、閉リーマン面、因子の交点数について概略を説明する。

第 3 章では、局所環つき空間として解析空間を定義し、特異点の概念を導入する。合わせて正規化、特異点解消、ブローアップ、商特異点などの基本的な用語も解説する。また、特異点はその局所環によって完全に決定されることを述べ、次元や重複度などの環論的不変量に関する基礎的な結果も紹介する。

第 4 章では、まず前半で、正規曲面特異点の特異点解消と、その例外集合上のサイクルに関わる基本種数や算術種数や Gorenstein 性について説明する。後半では、巡回商特異点の解消として藤木解消法を説明し、その応用として $z^n = f(x, y)$ の形の超曲面特異点の解消法を述べる。さらに、一般の場合に正規曲面特異点の特異点解消定理の証明を述べる。

第 5 章では、正規 $\mathbb{C}^*$ -曲面特異点($\mathbb{C}^*$ -作用をもつ正規曲面特異点)について、具体例の計算を通して、それらに親しんでもらうことを目的としている。正規 $\mathbb{C}^*$ -曲面特異点は正規曲面特異点全体の中で、かなり特殊なものである。しかし、このクラスは非常に多くの重要な例を含む。正規 $\mathbb{C}^*$ -曲面特異点についての基本的事項を説明し、特異点に付随する次数つきアフィン環の DPD 構成とよばれる表示について説明する。これによって、このクラスの特異点は、代数的性質と幾何的な性質の双方の関係が明確に分かる特異点であることが分かる。これらを踏まえて、有理 2 重点(つまり、Klein 特異点)について解説する。

第 6 章では、正規曲面特異点の不変量を特異点解消空間上のサイクルと層係数コホモロジーを用いて解析する方法を解説する。その目的のために、有理特異点や最小楕円型特異点に関するよく知られた結果にも証明を与えている。証明については、最近の方法も取り入れると共に、コホモロジーの初学者にも理解しやすいよう丁寧な記述を心掛けた。また、交点数による重複度の記述については、関係するイデアル層の基

点も含め詳しく述べている。さらに、最後の節ではspray商特異点も概説している。与えられた位相型を実現する特異点の定義式やその幾何種数を具体的に計算する方法を紹介しているので、実験や新たな例の発見などに役立ててほしい。この章の終わりに、いくつかの予想や不変量に関する最近の結果についても簡単に述べている。

第7章では、代数曲線の退化族と複素曲面特異点との関係について述べる。1960年代に小平邦彦をはじめ世界中で多くの人々により、複素曲面に関する精緻な研究がなされた。少し遅れた時期に並行して、M. Artin, E. Brieskorn, D. Mumford, H. Laufer, 斎藤恭司, S. S. T. Yau 等により、複素曲面特異点の研究が始まった。一方、1970年代にはV. I. Arnol'dにより力学系の視点から、解析関数芽の分類が研究された。これらの三つの対象の間の密接な関係がV. KulikovやM. Reidにより見出された。これにより、コンパクトリーマン面の1パラメーター退化族と正規曲面特異点の繋がりが意識されるようになった。この章では、こうした内容について述べる。また、 $\mathbb{C}^*$ -作用付きのコンパクトリーマン面の1パラメーター退化族を考えると、正規 $\mathbb{C}^*$ -曲面特異点と密接な繋がりがあっても述べる。

第8章では、道具として利用することを重視し、層とコホモロジーの基礎事項についてまとめている。第3章や第6章を初め、本書で利用している結果についてはここに整理されている。

特異点論の分野は幅広く、書籍は和書に限っても数多い。その中で、正規曲面特異点を扱った和書では、参考文献[76]の樋口-吉永-渡辺「多変数複素解析入門」、[90]の石井「特異点入門」、[255]の渡辺-日高「特異点論における代数的手法」等がある。また、本書の記述と関係深いものとして、[180]の岡「複素および混合超曲面特異点入門」がある。[76]は多変数複素解析の基礎を含め、第5章では複素正規曲面特異点の多重種数の理論を中心に丁寧に書かれている。代数幾何の視点からは[90]が名高い。[255]は可換環論の観点から標数正の場合を含めた特異点を論じている。[180]は複素超曲面特異点を位相幾何学的視点から論じている。これらと本書は議論が重複する箇所もあるが、同じ題材を[90]、[255]では代数的に、本書では複素幾何的に論じている。本書で扱う対象や手法は[76]に近いが、[76]が1980年に発刊されてから40年以上が経ったことから、本書の第6章や第7章では、著者達の視点からの近年の結果等も盛り込み、今日の複素曲面特異点論への入門として役立つことを企図している。一般に特異点論の和書では、その多くが特異点解消の存在定理の証明を省略している。しかし、本書では種々の具体例について実際に特異点解消の仕方を述べる。それらの準備の上に、複素曲面特異点の特異点解消の存在証明を述べる。

iv 序 文

なお、文献を複数引用している箇所では、本書の内容から見て重要度の高い順に並べた。また、日本人以外の人名ではカタカナ表記が確定していない場合も多く、定着している場合も適当でないこともあるので、本書ではローマ字表記を基本として、日本語として定着しているものについては、カタカナ表記も併用することとした。

本書の執筆は、第 1 章、第 2 章、第 4 章、第 5 章および第 7 章は都丸が担当し、第 3 章、第 6 章および第 8 章は奥間が担当したが、一冊の本としての整合性に配慮し執筆した。

本書の出版については、足利正氏(東北学院大学名誉教授)に内田老鶴圃内田学氏への紹介の労をとっていただいた。また、足利氏には、執筆について多くの励ましや、本書の粗原稿ができた段階で、全体を通して丁寧にお読みいただき、数多くの有益な指摘やアドバイスをいただいた。足利氏の存在なしには、本書の出版はあり得ず深く感謝したい。また、第 6 章の原稿に目を通していただき、有益なご指摘をくださった渡辺敬一先生(日本大学名誉教授)にも深く感謝したい。

さらに、著者達の長年の研究活動を通して交流いただいた国内外の、多くの先生、先輩、友人、知人の皆様にも、あらためて感謝したい。とくに、上記の両氏に加え、石井志保子(東京大学名誉教授)、泊昌孝(日本大学特任教授)、今野一宏(関西大学教授、大阪大学名誉教授)の各氏には、これまで著者達が研究者として過ごす中で、とりわけ多くの刺激と励ましを受けてきた。こうした非常に大きな恩恵に、あらためてここに記して感謝する。また、著者(都丸)は情報機器や $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ 等について、大塚岳氏(群馬大学情報学部准教授)に多々サポートいただいたことに感謝する。

最後に、本書の企画を快く引き受けて下さり、こうした出版に不慣れな著者達に適切な支援をしてくださった内田老鶴圃の内田学氏に深く感謝すると共に、細部まで入念にチェックして下さった編集担当の生天目悠也、笠井千代樹の両氏にも深く感謝する。

2025 年 7 月

都丸 正・奥間 智弘