編 者 緒 言

本書は，藤原松三郎著数学解析第一編「微分積分学」第一巻および第二巻を現代仮名遣いに改め，用語の一部を現在ひろく用いられているものに置き換えたものである．

微分積分学の分野では，周知のように我が国には高木貞治による「解析概論」という名著があり，ほぼ 80 年にわたり読み継がれてきている．本書第一巻が世に出たのは 1934 年で，ちょうど「解析概論」の原型である岩波講座「数学」版が執筆されていた頃である．「解析概論」は万人向きの解析学予修書を目指したもの（講座版結語より）であり，一方，「微分積分学」は日本語で書かれた解析教程（Cours d'Analyse）として，古典解析学の広範な成果の集成を目指している．両書は，互いに相補う役割を担う好対として戦前戦後を通じて版を重ねてきた古典である．少なからぬ理系研究者が本書を携えて欧米に留学したと聞く．

今般，書肆より，新しい読者のために表記を現代仮名遣いに改めた新編を出版したいとの提案があった．編者はこれを若い世代に本書を伝えていくための好機ととらえて作業に着手した次第である．新編では，仮名遣いを現代表記に改めたほかに，原著の香りを損なわない範囲で表現を口語に近づけた箇所もある．また，本文中の論証についても分かりやすくするため手を加えた箇所が若干ある．さらに，今日では使われることがなくなった術語を現在定着しているものに置き換えた．術語の選定にあたっては，「数学辞典」第 4 版（岩波書店）を基準とした．たとえば，「分離積分法」，（積分の）「代入法」をそれぞれ「部分積分法」，「置換積分法」とした．原著では「整函数」を整式で定義された関数という意味で用いているが，複素変数関数論における整関数 (integral function, entire function) との混同を恐れ，すべて「整式」または「多項式」に置き換えた．人名の表記も「数学辞典」に準拠して改めた．

編者の浅学非才のため，思わぬ誤解から却って原著の明晰性を損ねてはいないかと恐れる．読者の叱正を俟って改訂をしていく所存である．

なお，数学解析は第一編「微分積分学」第一，二巻に続き，第二編が計画されていた．第二編（もしくは第三巻）では，複素変数関数論，微分方程式に対する境界値問題，直交関数論，積分方程式論，変分法などを論ずる予定であった．残念なことに，これは実現しなかった．本文中では，所々「第二編で論ずる」旨の説明があるが，そのような事情であることを理解されたい．

2016 年 8 月

編著者

第 2 巻 編者緒言

第 2 巻においても第 1 巻と同様の方針で現代仮名遣いに改め，用語の一部を現在ひろく用いられているものに置き換えた．

特に，以下の五点に関しては，原著の用語を大きく変更し，あるいは記号を変えたことをお断りしておく．

- 第 5 章 §5.4 で定義されている三次元ユークリッド空間における領域の「単一連結性」は今日の用語とは異なるため，現在の標準的な定義に置き換えた．（原著の単一連結性は，基本群のみならず，二次元ホモトピー群も自明であることを要求しており，現在流通している単連結性よりも厳しい条件である．）
- 第 6 章 §6.9 で定義される「曲線元素」と第 8 章 §8.9 で用いられている「曲線元素」は異なるものを指しているので，前者を「線素」，後者を「曲線元素」と呼び分けることにした．同様に，第 7 章 §7.16 で定義される「表面元素」と第 9 章 §9.2 で定義される「曲面元素」は，ちょうど「線素」と「曲線元素」との関係に対応する．
- 第 7 章で導入される曲線積分（第 3 節），曲面積分（第 5 節）の定義を，それぞれ，線素に関する曲線積分，面積要素に関する曲面積分から出発することにした．今日では，こちらの方法のほうが主流であると判断した．
- 第 8 章 §8.29 で論じられている「定差方程式」を「差分方程式」と言い換えた．
- 第 9 章では「ヤコビの括弧」が二種類現れるが，原著では，一階線形偏微分作用素 X, Y の交換子を (X, Y) とし（§9.5），関数 F, G に対するものは $[F, G]$ としている（§9.18）．しかし，現在では，交換子も $[X, Y]$ と記すのが通常であるので，そのように変更した．

なお，第 2 巻，第 9 章では一階偏微分方程式の解法を詳細に紹介している．類書に例を見ない本書の特色となっていることを指摘しておきたい．

2017 年 3 月

編著者

第5章　多変数の関数

第1節　n 次元空間の点集合

5.1. **n 次元ユークリッド空間.**　我々は第 4 章において，多変数関数のモデルとして，特に二変数関数について詳論した．本章では第 4 章の結果を n 変数の関数の場合に拡張しよう．

第 4 章と平行に進むためには，二重数列，二重級数の理論を n 重の数列および級数に拡張するのが順序である．ただしその主要な性質は，前者の理論から比較的容易に見てとれるから，この平行な議論を避けて，直ちに多変数の関数の理論に入ることにする．これにはまず平面上の点集合の概念を n 次元の空間に拡張せねばならない．

二つの実数の一組 (x, y) を座標として，ユークリッド平面の一点が定まるように，n 個の実数 x_1, x_2, ..., x_n の一組 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が一つの点 $\boldsymbol{x}$ を定めるものと考え，$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を点 $\boldsymbol{x}$ の座標と名づける．ただし簡単のために，$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ そのものが点 $\boldsymbol{x}$ を表すものと考えてもよい．これを $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ で表すことにする．x_k を点 $\boldsymbol{x}$ の**第 k 座標**という．

x_1, x_2, ..., x_n の各々に任意の実数の値をとらせた場合に，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の全体からなる点集合を **n 次元のユークリッド空間**と名づけ，これを $\mathbb{R}^n$ で表す*1．

特に $(0, 0, \ldots, 0)$ を $\mathbf{0}$ で表し，**原点**と名づける．

2 点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ は $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, ..., $x_n = y_n$ なるときに限り，**相等しい**といい，これを記号 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ で表す．

点 $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$ を点 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ の**和**といい，$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ で表す．従って $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z}$ が成立する．

また $(x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n)$ を点 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ の**差**といい，$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ で表す．$\boldsymbol{x}$ を特

---

§5.1,*1　〔**編者注**：原著では $\mathbf{R}_n$ と表記されている．〕

に $\mathbf{0}$ とすれば，$\mathbf{0}-\boldsymbol{y}=(-y_1,-y_2,\dots,-y_n)$ を略して $-\boldsymbol{y}$ で表す．$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$ である．

k を一つの実数とするとき，$(kx_1,kx_2,\dots,kx_n)$ を $k\boldsymbol{x}$ で表す．

二点 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ に対し，

$$\big((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2\big)^{1/2}$$

なる実数 $(\geqq 0)$ を $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ 間の**距離**といい，これを記号

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$$

で表す．$\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$ とすれば，

$$\|\boldsymbol{x}\|=\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\Big)^{1/2}.$$

これは $\boldsymbol{x}$ と $\mathbf{0}$ との距離であって，点 $\boldsymbol{x}$ の**ノルム**ともいう．$\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{y}$ と等しい場合を除いては，常に

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|>0$$

である．

コーシーの不等式（第 1 巻，§3.10, 例題 2）によれば，

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}\|^2\cdot\|\boldsymbol{y}\|^2&=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\,(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)\\&\geqq(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)^2.\end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2&=(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2+\cdots+(x_n+y_n)^2\\&=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)+(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)\\&\qquad+2\,(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)\\&\leqq\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2+2\,\|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{y}\|=(\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|)^2,\end{aligned}$$

すなわち

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leqq\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|.$$

$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ の代わりに $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}$ をおけば，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}$ となるから，上式は

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}\|\leqq\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|+\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}\|$$

に変わる．これは $\mathbb{R}^n$ における三点 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ の作る三角形の二辺の長さの和が第三辺の長さより小ならずということを示す関係式にほかならぬ．よってこれを**距離の三角不等式**と呼ぶ．

すなわちコーシーの不等式は $\mathbb{R}^n$ における距離の三角不等式を別の言葉で表したものにほかならない．

5.2. 近傍と集積点． $\mathbb{R}^n$ の一点 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ からの距離が ρ に等しい点の集合を，中心 $\boldsymbol{a}$, 半径 ρ の球 S という．$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \rho$ なる点 $\boldsymbol{x}$ を球 S 内の点といい，このようなすべての点の集合を，点 $\boldsymbol{a}$ の近傍という．丁寧にいえば点 $\boldsymbol{a}$ の (ρ) **近傍**という．

ここに $\mathbb{R}^n$ におけるある点集合 M が与えられたとする．$\mathbb{R}^n$ の一点 $\boldsymbol{a}$ (M に属していなくともよい) のいかなる近傍をとっても，その中に M の点 ($\boldsymbol{a}$ が M に属する場合には $\boldsymbol{a}$ 以外の点) が含まれる場合に，$\boldsymbol{a}$ を M の一つの**集積点**という (第 1 巻, §4.14 参照)．

換言すれば，ρ をどんなに小さくとっても，$0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \rho$ を満足する少なくとも一つの点 $\boldsymbol{x}$ が M に含まれる場合に，$\boldsymbol{a}$ を M の集積点という．

M の集積点がすべて M に属するとき，M を**閉集合**という．

集積点に関しては，第 4 章 (第 1 巻, §4.14) で述べた**ワイエルシュトラス–ボルツァーノ (Weierstrass–Bolzano) の定理**が $\mathbb{R}^n$ の場合にも成立する．

定理 1． $\mathbb{R}^n$ **における一つの無限集合** M **が有界ならば，少なくとも一つの集積点をもつ．**

M が閉集合ならば，この集積点は M に属する．

ここに無限集合というのは，それに含まれる点の個数が有限でないものをいい，有界というのは，それに属するすべての点が，一つの球内にある場合をいう．

証明． 無限集合 M が有界ならば，正の実数 k が定まり M に属する点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ をどのようにとっても，$\|\boldsymbol{x}\| \leqq k$ が満たされる．従って $|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n| \leqq k$ が成立する．今 M に属するすべての点の第一座標のみを考えれば，それらの集合 L_1 は有界であるから，一次元空間のワイエルシュトラス–ボルツァーノの定理 (第 1 巻, §1.16) によって少なくとも一つの集積値をもつ．これを ξ_1 としよう．従って ξ_1

第6章　曲線と曲面

第1節　平面曲線

6.1.　曲線.　幾何学上の問題は微積分学発生の素因をなし，またその発展を促したのである．しかし微積分学の応用として，曲線および曲面の性質を組織的に論じることは，今日においては微分幾何学の領域に属するので，本節では唯基本的な事項についてのみを議論するにとどめることとしよう．

まず曲線の定義から始めよう．

今まで取り扱ってきた曲線は，$f(x)$ をある区間 $[a,b]$ 上で一価連続関数とするとき，$y=f(x)$ を満たす (x,y) を座標にもつ平面上の点の集合を意味した．しかしこれは y 軸に対する平行線とは唯一点で交わるという制限のある曲線のみを表す．この制限を撤去するために，補助変数 t を導入して，区間 $[\alpha,\beta]$ における二つの一価連続関数 $f(t)$, $g(t)$ により

$$x=f(t),\qquad y=g(t) \tag{1}$$

で定義される (x,y) の集合を**連続曲線**と定義する．(1) を補助変数による曲線の表示という．

$[\alpha,\beta]$ 内の一つの t に対しては，この曲線 C 上に唯一つの点が対応するが，C 上の一点には必ずしも $[\alpha,\beta]$ 内の唯一つの t が対応するとは限らない．C 上の一点に対し $[\alpha,\beta]$ 内の少なくとも二つの異なる t が対応する場合に，このような点を C の**重複点**という．重複点を持たない連続曲線を**単一連続曲線**または**ジョルダン (Jordan) 曲線**という．これを略して**単一曲線 (単純曲線)** ということにする．

区間 $[\alpha,\beta]$ の両端 $t=\alpha$, $t=\beta$ に C の同一の点が対応する場合に，C を**閉曲線**という．この場合には，$t=\alpha$, $t=\beta$ に対応する点は重複点とは言わない．重複点を持たない閉曲線を**単一閉曲線 (単純閉曲線)** または**ジョルダン閉曲線**という．

例えば，円，楕円等は単一閉曲線である．また曲線 $x = \sin 2t$, $y = \sin 3t\,(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ は 7 個の重複点を持つ図 6–1 のような閉曲線である．

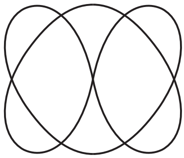

図 6–1

$$x = \sin pt, \quad y = \sin qt \qquad (-\infty < t < \infty)$$

の表す連続曲線は $p/\,q$ が有理数であるか，無理数であるかに従って，その性質が非常に相違する．

$p/\,q$ が有理数 $m/\,n$ に等しい場合には，$t = r$ と $t = r + (2n\pi)/\,q$ に対応する二点は一致する．故に t が 0 から $2n\pi/\,q$ まで変化すれば，(x, y) は一つの閉曲線 $\varGamma$ を描き，t が $2n\pi/\,q$ から増加して $+\infty$ に向かえば，(x, y) は $\varGamma$ を何回となく繰り返して描く．t が 0 から $-\infty$ に向かう場合も同様である．これに反して $p/\,q$ が無理数に等しい場合には，t が $(-\infty, +\infty)$ の間を変化するとき，(x, y) は決してもとの道に帰ることはなく，常に新しい道を進む．詳しく言えば，正方形 $-1 \leqq x, y \leqq 1$ 内に任意の点 $x_0 = \sin\, t_1$, $y_0 = \sin t_2$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq t_1,\, t_2 \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ をとれば，整数 a, b, t_0 を

$$|pt_0 - 2a\pi - t_1|, \quad |qt_0 - 2b\pi - t_2| < \varepsilon \qquad (\varepsilon \text{ は任意に小さな正数})$$

なるように定めることができる (藤原，代数学，第 1 巻，§7.24 参照)．従って $x = \sin pt_0$, $y = \sin qt_0$ は点 $x = \sin(2a\pi + t_1) = x_0$, $y = \sin(2b\pi + t_2) = y_0$ にどれほどでも近くなる．すなわち考えている曲線上の点は正方形 $-1 \leqq x$, $y \leqq 1$ 内で到る所稠密である．一歩進めて，正方形内のすべての点を通るような曲線が存在することは，ペアノ (Peano) によって 1890 年に初めて証明された．これはペアノの正方形を充塡する曲線として有名なものであるが，これは第二編で論ずるであろう*1．

曲線

$$C: \qquad x = f(t), \quad y = g(t) \qquad (a \leqq t \leqq b)$$

に対し，$f'(t_0)$ が存在して 0 でないならば，陰関数の理論によって，$x = f(t)$ を解いて

$$t = \varphi(x), \qquad \bigl(t_0 = \varphi(x_0), \quad x_0 = f(t_0)\bigr)$$

§6.1,*1 〔**編者注**：第二編は未刊．編者緒言参照.〕

とすることができる．ただし $\varphi(x)$ は x_0 のある近傍において x の一価連続関数である．従って $y_0 = g(t_0)$ とすれば，曲線 C は (x_0, y_0) の近傍においては

$$y = g\bigl(\varphi(x)\bigr) = F(x)$$

の形に表される．ここに $F(x)$ は $x = x_0$ のある近傍上で x の一価連続関数で，かつ $y_0 = F(x_0)$ である．

もし $f'(t_0) = 0$ ならば，$g'(t_0) \neq 0$ の仮定の下に同様に論ずれば，曲線 C は

$$x = G(y), \qquad \bigl(x_0 = G(y_0)\bigr)$$

の形に表される．

ただし以上の所論は，(x_0, y_0) の近傍上について言われていることであって，C の全体については，必ずしも成立しないことに注意する必要がある．

6.2. 接線と法線.　曲線

$$C: \qquad x = f(t), \quad y = g(t) \qquad (a \leqq t \leqq b)$$

上の t_0, t に対応する二点 P_0, P を結ぶ直線は，(ξ, η) を流通座標とすれば，

$$\frac{\xi - f(t_0)}{f(t) - f(t_0)} = \frac{\eta - g(t_0)}{g(t) - g(t_0)},$$

すなわち

$$\frac{\eta - g(t_0)}{\xi - f(t_0)} = \frac{g(t) - g(t_0)}{f(t) - f(t_0)}$$

で表される．点 P が点 P_0 に近づくとき，この直線 P_0P が一つの直線 l に限りなく近づくとき，l を P_0 における**接線**という．接線が存在するためには

$$\lim_{t \to t_0} \frac{g(t) - g(t_0)}{f(t) - f(t_0)}, \qquad \text{または} \quad \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{g(t) - g(t_0)} \tag{a}$$

の存在が必要かつ充分である．

P_0 を通り，接線に直交する直線を，P_0 における**法線**という．

極限 (a) が存在するための最も簡単な充分条件は

(A)　　$f'(t_0), g'(t_0)$ が存在して　$\bigl(f'(t_0)\bigr)^2 + \bigl(g'(t_0)\bigr)^2 \neq 0$

なることである．この場合には，$f'(t_0) \neq 0$ ならば，(a) の第一のものは $g'(t_0)/\,f'(t_0)$ となる．$f'(t_0) = 0$ の場合には $g'(t_0) \neq 0$ であるから (a) の第二のものは $f'(t_0)/\,g'(t_0) = 0$ となる．いずれにしても，P_0 における接線は

第7章　多 重 積 分

第1節　多重積分の基本性質

7.1. **三重積分**．第 4 章で論じた二重積分の概念を n 変数の場合に拡張したものを**多重積分**と名づける．叙述を簡単にするため，$n=3$ として論じることにするが，その論法は一般の場合に適用することができる．

三次元空間 $\mathbb{R}^3$ の点の直角座標を (x,y,z) とする．直方体

$$a_1 \leqq x \leqq a_2, \quad b_1 \leqq y \leqq b_2, \quad c_1 \leqq z \leqq c_2$$

を Δ で表し，Δ 上で定義された有界関数 $f(x,y,z)$ を考える．今

$$a_1 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{p-1} < x_p = a_2,$$

$$b_1 = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{q-1} < y_q = b_2,$$

$$c_1 = z_0 < z_1 < z_2 < \cdots < z_{r-1} < z_r = c_2$$

を満足する分点 $(x_1,x_2,\ldots,x_{p-1})$, $(y_1,y_2,\ldots,y_{q-1})$, $(z_1,z_2,\ldots,z_{r-1})$ によって，区間 $[a_1,a_2]$, $[b_1,b_2]$, $[c_1,c_2]$ をそれぞれ p, q, r 個の小区間に分け，Δ を pqr 個の小直方体の系列

$$\Delta_{ijk}: \qquad x_i \leqq x \leqq x_{i+1}, \quad y_j \leqq y \leqq y_{j+1}, \quad z_k \leqq z \leqq z_{k+1},$$

$$(i=0,1,\ldots,p-1; \quad j=0,1,\ldots,q-1; \quad k=0,1,\ldots,r-1)$$

に分割する．Δ の体積を ω, Δ_{ijk} の体積を ω_{ijk} とし，Δ_{ijk} における $f(x,y,z)$ の上限と下限をそれぞれ L_{ijk}, M_{ijk}, Δ における $f(x,y,z)$ の上限と下限をそれぞれ L, M とすれば，$f(x,y,z)$ は有界関数であるから，これらの数はすべて有限であって

$$M \leqq M_{ijk} \leqq L_{ijk} \leqq L$$

を満たす．故に

$$\overline{S}_1 = \sum L_{ijk}\,\omega_{ijk}$$
$$\underline{S}_1 = \sum M_{ijk}\,\omega_{ijk}$$

とおけば,

$$\overline{S}_1 \leqq L\sum \omega_{ijk} = L\,\omega,$$
$$\underline{S}_1 \geqq M\sum \omega_{ijk} = M\,\omega$$

が成立する．

各 Δ_{ijk} をさらに細分して $\overline{S}_1$, $\underline{S}_1$ に相当するものを作り，これを $\overline{S}_2$, $\underline{S}_2$ で表せば,

$$\overline{S}_2 \leqq \overline{S}_1, \qquad \underline{S}_2 \geqq \underline{S}_1$$

となる．これは Δ_{ijk} のそれぞれに対して，上述の不等式に相当するものを作って，これらを総和すれば分かる．

このように Δ の細分を続けて行い，p, q, r のそれぞれを $\to\infty$ とすると同時に，$\mathrm{Max}\,(x_{i+1}-x_i)$, $\mathrm{Max}\,(y_{j+1}-y_j)$, $\mathrm{Max}\,(z_{k+1}-z_k)$ を $\to 0$ にすれば, $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$, $\overline{S}_3$, $\ldots$ はすべて $M\,\omega$ 以上であって，単調減少数列を作るから，一定の極限を持つ．これを $\overline{S}$ で表そう．同様に $\underline{S}_1$, $\underline{S}_2$, $\underline{S}_3, \ldots$ はすべて $L\,\omega$ 以下であり，単調増加数列を作るから，また一定の極限を持つ．これを $\underline{S}$ で表そう．これらに対し

$$\underline{S} \leqq \overline{S}$$

が成立することは，$\underline{S}_n \leqq \overline{S}_n$ から明らかである．

Δ の細分の仕方を変えて，新たに $\overline{S}_1'$, $\overline{S}_2'$, $\overline{S}_3', \ldots$ なる数列を作っても，常に同一の極限 $\overline{S}$ を持つことを次に証明しよう (第 1 巻，§3.8 と同一の論法による).

仮定により $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$, $\ldots$ は減少しつつ $\overline{S}$ に収束するから，$\varepsilon > 0$ を如何に小さくとっても，m を充分大にとれば,

$$\overline{S} \leqq \overline{S}_m < \overline{S} + \frac{\varepsilon}{2}$$

とすることができる．このような m を一つ求めて固定しておく．$\overline{S}_m$ に対する Δ の分割における小直方体を Δ_{ijk} とし，その稜の長さの最小値を δ とする．次に n を充分大きくとれば，$\overline{S}_n'$ に対する Δ の分割における小直方体 Δ_{ijk}' の各稜の長さを $\delta'\,(<\delta)$ より小とすることができる．ここで両方の分割を合併した分割を考え，これ

に対する和を $\overline{S}''$ で表せば，この新分割は先の二つの分割の各々をさらに細分したものであるから，

$$\overline{S}'' \leqq \overline{S}_m, \qquad \overline{S}'' \leqq \overline{S}'_n.$$

然るに Δ_{ijk} の稜の長さは δ 以上で，Δ'_{ijk} の稜の長さは $\delta'\,(<\delta)$ より小であるから，合併分割における小直方体の頂点は Δ'_{ijk} の頂点のいずれかと一致するか，Δ'_{ijk} 内 (側面も含めて) に落ちるかであるが，決して二つ以上の頂点が同一の Δ'_{ijk} 内に落ちることはない．もし一つの頂点が Δ'_{ijk} 内に落ちた場合には，Δ'_{ijk} は高々 8 個の小直方体に分割される．$\overline{S}''$ と $\overline{S}'_n$ に関する，それぞれの小直方体におけるものとの差は $\leqq 2K\,\omega'_{ijk} \leqq 2K\,\delta'^3$ である．ただし Δ 全体においては $|f(x,y,z)|<K$ と仮定する．このような小直方体の数は高々 $\overline{S}_m$ に対する分割の頂点の個数 pqr である．それ以外の Δ'_{ijk} では，$\overline{S}''$, $\overline{S}'_n$ において同一の値をとる．故に

$$\overline{S}'_n \leqq \overline{S}'' + 2K\,pqr\,\delta'^3.$$

δ' を $2K\,pqr\,\delta'^3 < \dfrac{\varepsilon}{2}$ となるように充分小さくとれば

$$\overline{S}'_n < \overline{S}'' + \frac{\varepsilon}{2} \leqq \overline{S}_m + \frac{\varepsilon}{2} < \overline{S} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \overline{S} + \varepsilon.$$

すなわち，任意に小さい $\varepsilon>0$ に対し，n を充分大きくとれば，$\overline{S}'_n < \overline{S}+\varepsilon$ が成り立つようにすることができる．故に $\overline{S}'_n$ の極限を $\overline{S}'$ とすれば，$\overline{S}' \leqq \overline{S}$ が成り立つことを得た．

次に $\overline{S}_1, \overline{S}_2, \ldots$ と $\overline{S}'_1, \overline{S}'_2, \ldots$ とを入れ替えて考えれば，$\overline{S} \leqq \overline{S}'$ となり，結局 $\overline{S} = \overline{S}'$ となる．よって次の結果が得られる．

三次元空間 $\mathbb{R}^3$ 内の直方体 Δ の分割を細かくして，小直方体 Δ_{ijk} の各稜の長さの最大値が 0 に収束するように分割を細かくすれば，$\overline{S}_n$, $\underline{S}_n$ はそれぞれ一定の極限 $\overline{S}$, $\underline{S}$ を持つ．これらは Δ の細分の仕方の如何にかかわらず定まる．

このように定められた $\overline{S}$, $\underline{S}$ をそれぞれ Δ における有界関数 $f(x,y,z)$ の**上積分**，**下積分**といい，それぞれ記号

$$\overline{\iiint_{(\Delta)}} f(x,y,z)\,d\omega, \qquad \underline{\iiint_{(\Delta)}} f(x,y,z)\,d\omega,$$

または

第8章　常微分方程式

第1節　一階微分方程式

8.1. **常微分方程式.**　関数 $f(x)$ の積分を求めることは

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

に適合する関数 $y(x)$ を求めることにほかならぬ．この問題を拡張して，右辺の $f(x)$ の代わりに，x および y の既知関数 $f(x, y)$ をとれば

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

を満足する関数 $y(x)$ を求める問題が生ずる．これを特別の場合として含む

$$F(x, y, y') = 0 \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right) \tag{1}$$

を**一階微分方程式**という．

y' のほかに n 次までの導関数 y'', y''', ..., $y^{(n)}$ をも含む場合

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{2}$$

を **n 階微分方程式**という．

(1), (2) は唯一つの変数 x の未知関数 y およびその導関数を含む方程式であるが，二変数 x, y の関数 z とその偏導関数を含む方程式

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ldots\right) = 0$$

を**偏微分方程式**という．これと区別するために，上述の微分方程式 (1), (2) を**常微分方程式**という．

本章では専ら常微分方程式を論じ，次章で偏微分方程式を論ずることとする．よって本章では一々常の字を冠らせない．

我々は第3章において，いかなる条件の下に，$\dfrac{dy}{dx} = f(x)$ を満足する $y(x)$ が存在するかという問題を論じた．これと平行に考えれば，ここでも第一に，与えられた微

分方程式

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

がいかなる条件の下にこれを満足する $y(x)$ をもつかを論ずるのが順序である．しかしこの根本問題はしばらく後節に譲り本節では実際問題で遭遇する特殊な場合場合に応じて，その解の形を求めることに主眼点をおく．

一階微分方程式 (1) の解を求める方法の基調をなす考えは，変数 x, y に適当な変換

$$x = \varphi(\xi, \eta), \quad y = \psi(\xi, \eta) \tag{3}$$

を施して，(1) を

$$\frac{d\eta}{d\xi} = G(\xi) \tag{4}$$

の形に直して，結局 $G(\xi)$ の積分 η を求めることに順致しようとすることにある．もちろんこのような変換が可能な場合は極めて狭い範囲に限られるのであるが，これが可能な場合に，(1) を**積分で解かれる微分方程式**と名づけよう．欧米においては**求積** (quadrature) によって解かれる微分方程式という．

8.2. 変数分離可能の場合． いかなる条件の下に，(1) を (4) の形にする変換 (3) が存在するか．これを定めることは，相当に困難な問題である．これは第二編[*1]に譲り，本節ではこのようなことが可能な特殊の場合についてのみ論ずる．

まず (1) の特殊な形

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1*}$$

から出発する．

$f(x, y)$ が x の関数 $g(x)$ と y の関数 $h(y)$ との商 $g(x)/h(y)$ として表される場合には，変換

$$\xi = x, \quad \eta = \int h(y)\, dy$$

によって，(1^*) は

$$\frac{d\eta}{d\xi} = g(\xi)$$

となる．よって

§8.2,*1 〔**編者注**：第二編は未刊．編者緒言参照.〕

$$\frac{dy}{dx} = g(x)/h(y) \tag{a}$$

は積分で解かれる．$g(x)$, $h(y)$ の積分可能を仮定するのはもちろんである．この (a) はまた

$$h(y)\,dy = g(x)\,dx$$

の形に表されるから，(a) は**変数** x, y **が互いに分離される**場合である (**変数分離形**ともいう)．

例題 1.
$$\frac{dy}{dx} = f(ax+by), \qquad (a,\ b \text{ は常数}).$$

$x=\xi$, $ax+by=\eta$ とおけば

$$\frac{d\eta}{d\xi} = a + bf(\eta).$$

よって

$$\int \frac{d\eta}{a+bf(\eta)} = \xi + c.$$

左辺は η のみの関数であるから，これから η が ξ の関数として定められる．

例題 2.
$$\frac{dy}{dx} = y^2 f(xy).$$

$xy=z$ とおけば　$y = \dfrac{z}{x}$,　$y' = \dfrac{xz'-z}{x^2} = y^2 f(xy) = \dfrac{z^2}{x^2} f(z)$.

故に

$$\frac{dz}{z^2+zf(z)} = \frac{dx}{x}.$$

これで変数が分離された．

例題 3.
$$x + yy' = f(x)\varphi(\sqrt{x^2+y^2}).$$

$x^2+y^2=z^2$ とおけば，

$$x + yy' = zz' = f(x)\varphi(z).$$

故に

$$\frac{zdz}{\varphi(z)} = f(x)\,dx.$$

8.3.　**線形微分方程式．**　$f(x,y)$ が y について一次式なる場合，すなわち

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y + B(x) \tag{b}$$

を**線形微分方程式**という．

　これに対して

$$x=\xi, \quad y=\varphi(\xi)\eta, \quad \text{すなわち} \quad y=\varphi(x)\eta$$

なる変換を施せば，(b) は

第9章　偏微分方程式

第1節　準線形一階偏微分方程式[*1]

9.1. 偏微分方程式とその階数.　§8.1 で注意した通り, m 個の変数 $x_1, x_2, \ldots, x_m$ と，それらの関数 z およびその偏導関数の間に成立する方程式を**偏微分方程式**という．この方程式に含まれる偏導関数の最高次数を偏微分方程式の**階数**という．例えば二変数 x, y の関数 z の一次，二次の偏導関数を

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t$$

とするとき

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

をそれぞれ一階，二階の偏微分方程式という．

9.2. 一階偏微分方程式の解.　我々はまず一階偏微分方程式

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

を解くとはいかなる意味かを考えてみよう．

今三次元空間における点の直角座標を (x, y, z) とする．xy 平面上の点 $(\alpha, \beta, 0)$ を中心とする半径 ρ の球は

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + z^2 = \rho^2 \tag{1}$$

で表される．ここに (α, β) を任意の常数の点とし，(1) を x, y で微分すれば

$$(x-\alpha) + z\,p = 0, \quad (y-\beta) + zq = 0, \qquad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

これらを (1) に代入すれば，(α, β) が消去されて

---

*1　〔**編者注**：「線形」,「準線形」の違いについては 449 頁を見よ.〕

$$z^2\,(1+p^2+q^2)=\rho^2 \tag{2}$$

なる一階偏微分方程式が得られる.

この場合に，(1) は (2) の一つの解であるという．この解は二個の任意常数 α,β を含んでいる.

次に

$$\varphi(x^2+y^2+z^2,\, ax+by+cz)=0 \tag{3}$$

において $\varphi(u,v)$ を全微分可能な任意の関数とすれば，(3) は原点 $(0,0,0)$ を通って平面 $ax+by+cz=0$ に直交する直線 L を軸とする一つの回転曲面を表す.

何となれば，上記の平面 $ax+by+cz=0$ に平行な任意の平面 $ax+by+cz=k$ で (3) を切れば，その切口は $\varphi(x^2+y^2+z^2,k)=0$ の切口と同一であって，方程式 $\varphi(x^2+y^2+z^2,k)=0$ は原点を中心とする球を表すから，この切口は L と $ax+by+cz=k$ との交点を中心とする一つの円である．k を変化させて考えれば，(3) が上述のような回転面であることが分かる.

今 $x^2+y^2+z^2=u$, $ax+by+cz=v$ とおいて，$\varphi(u,v)=0$ を x および y について微分すれば

$$2(x+zp)\,\varphi_u+(a+cp)\,\varphi_v=0,\quad 2(y+zq)\,\varphi_u+(b+cq)\,\varphi_v=0.$$

これから φ_u, φ_v を消去すれば,

$$(x+zp)\,(b+cq)=(y+zq)\,(a+cp),$$

すなわち

$$p(bz-cy)+q(cx-az)=ay-bx \tag{4}$$

なる一階偏微分方程式が得られる．この場合にも，(3) は (4) の一つの解であるという．然るに (3) は任意常数の代わりに任意関数 φ を含んでいる.

さて一般の一階偏微分方程式

$$F(x,y,z,p,q)=0 \tag{a}$$

に戻って，F を五個の変数 x, y, z, p, q のある領域 Δ で一次，二次の偏導関数と共に一価連続であると仮定する.

xy 平面上の一つの領域 D で $f(x,y)$ およびその一次，二次の偏導関数が一価連続で，

$$z = f(x,y), \quad p = f_x, \quad q = f_y$$

を $F(x,y,z,p,q)$ に代入したとき，これが D 上のすべての (x,y) に対して恒等的に 0 となる場合に，$z = f(x,y)$ を (a) の解という．

これは幾何学的に次のようにも解釈される．

$z = f(x,y)$ の表す曲面を S とし，S 上の一点 (x,y,z) における接平面の方程式は (ξ,η,ζ) を流通座標とすれば

$$\zeta - z = p\,(\xi - x) + q\,(\eta - y)$$

で表され，(x,y,z) における法線の方向係数は $(p,q,-1)$ に比例する．故に (x,y,z,p,q) の五個の値の一組に対して曲面上の点と，その点における接平面とが対応する．

次に曲面 S を離れて (x,y,z,p,q) なる五個の変数にある一定の値を与えれば，(x,y,z) なる一点と，方向係数が $(p,q,-1)$ に比例する直線に直交する (x,y,z) を通る一平面とが定まる．§8.9 において導入した曲線元素と同様に，空間における一点と，これを通る平面の微小部分をまとめて**曲面元素**と名づける．すなわち (x,y,z,p,q) が一つの曲面元素を定める．

三次元空間における曲面元素 (x,y,z,p,q) に対して，x, y, z, p, q の各々を独立に任意の値をとらせることができる (ただし $p = q = 0$ は除く)．このことを曲面元素が ∞^5 だけ存在するという言葉で表すのが普通である．

一つの偏微分方程式 (a) が与えられた場合には，(a) を満足する曲面元素 (x,y,z,p,q) は，x, y, z, p, q のうち一つは残りの四個で定まるのであるから，∞^4 だけ存在する．これらの曲面元素の内から，一つの曲面の曲面元素を作るような ∞^2 だけを抽き出すことが，(a) を解くという幾何学的な意味になる．

これをさきに取り扱った

$$F(x,y,z,p,q) \equiv z^2\,(1 + p^2 + q^2) - \rho^2 = 0 \tag{2}$$

について説明しよう．

方向係数が $(p,q,-1)$ に比例する直線が z 軸となす角を θ とすれば，$\cos\theta = (1 + p^2 + q^2)^{-1/2}$ である．故に (2) を満足する曲面元素はまた $z^2 = \rho^2\,\cos^2\theta$ を満