計算力をつける

応用数学 問題集

魚橋慶子・梅津　実

共著

内 田 老 鶴 圃

まえがき

本書は理工系学生向け教科書『計算力をつける応用数学』に対応する問題集である．教科書を使用するうち「より多くの問題演習を行いたい」「もっと難しい問題を解きたい」という声が挙がり，本問題集を刊行する運びとなった．

本書の利用対象として大学 2・3 年生，高専高学年生を念頭に置いている．しかし学年が進むにつれ学科専門科目が増加し，応用数学の勉学へ長時間を割くことが困難な学生もいるであろう．その場合は A 問題または奇数番号の小問を選び解くことで最低限の演習ができるよう，配慮した．また教科書が手元になくとも問題演習をすることができるよう，各章の冒頭に重要公式や方程式の解法をまとめた．

第 0 章は複素数についての基本的な演習である．四則演算，複素平面，オイラーの公式について，高校の内容から大学の内容まで取り挙げる．専門科目諸分野に現れる複素数の基礎概念を，複素関数論の不履修者でも修得できるよう，配慮した．

第 1 章は常微分方程式について，第 2 章はフーリエ級数・フーリエ変換について，第 3 章はラプラス変換についての演習である．これらの章にも，高校の復習や大学教科書レベルの問題を多数用意した．そして力学・電気回路などの応用問題も揃え，読者それぞれの専門科目の導入を兼ねるようにした．

第 4 章は複素関数の微積分，いわゆる複素関数論についての演習である．複素関数の基礎から留数定理までを学習する．特に複素平面上の微積分をイメージすることが難しい学生のため，標準的な問題を繰り返し並べた．

「より多くの問題演習を行いたい」「もっと難しい問題を解きたい」という声に応えることができれば，幸いである．

2016 年 2 月

魚橋慶子・梅津　実

目　次

まえがき …… i

第 0 章　複素数

§0.1　複素数とは …… 1
§0.2　複素数の四則演算 …… 1
§0.3　複素平面 …… 1
§0.4　絶対値と偏角 …… 1
§0.5　ド・モアブルの公式 …… 2
§0.6　共役複素数 …… 2
§0.7　複素平面上の円 …… 2
§0.8　オイラーの公式 …… 3
問題 A …… 4
問題 B …… 6

第 1 章　常微分方程式

§1.1　微分方程式とは …… 9
§1.2　変数分離形 …… 9
§1.3　同次形 …… 10
§1.4　線形 1 階微分方程式 …… 10
§1.5　完全微分形 …… 10
§1.6　線形 2 階微分方程式（同次形） …… 11
§1.7　線形 2 階微分方程式（非同次形） …… 11
§1.8　2 階を超える線形微分方程式 …… 12
問題 A …… 14
問題 B …… 20

第 2 章　フーリエ級数とフーリエ変換

§2.1　フーリエ級数 …… 27

§2.2　三角関数とベクトルの比較 ・・・ 30
§2.3　フーリエ級数の性質 ・・・ 32
§2.4　偏微分方程式の解法（フーリエ級数の利用） ・・・ 33
§2.5　フーリエ変換 ・・・ 34
§2.6　フーリエ変換の性質 ・・・ 35
§2.7　偏微分方程式の解法（フーリエ変換の利用） ・・・ 37
問題 A ・・・ 38
問題 B ・・・ 41

第 3 章　ラプラス変換

§3.1　ラプラス変換 ・・・ 47
§3.2　簡単なラプラス変換 ・・・ 47
§3.3　ラプラス変換の性質 ・・・ 48
§3.4　逆ラプラス変換 ・・・ 51
§3.5　定数係数常微分方程式の初期値問題 ・・・ 53
§3.6　インパルス応答と合成積 ・・・ 53
問題 A ・・・ 54
問題 B ・・・ 60

第 4 章　複素関数

§4.1　実部と虚部 ・・・ 65
§4.2　コーシー–リーマンの方程式 ・・・ 65
§4.3　微分の公式 ・・・ 65
§4.4　指数関数 ・・・ 66
§4.5　三角関数 ・・・ 66
§4.6　双曲線関数 ・・・ 67
§4.7　極 ・・・ 67
§4.8　複素積分 ・・・ 68
§4.9　テイラー級数とローラン級数 ・・・ 70
§4.10　多価関数 ・・・ 71
問題 A ・・・ 73
問題 B ・・・ 78

問題解答

第 0 章 ………… *85*
第 1 章 ………… *89*
第 2 章 ………… *101*
第 3 章 ………… *109*
第 4 章 ………… *118*

索　引 ………… *125*

0

第0章 複　素　数

§0.1　複素数とは

虚数単位：i　　$i^2=-1$

複素数：$z=x+yi$（x,y は実数）

実部：$x=\mathrm{Re}(z)$　　　虚部：$y=\mathrm{Im}(z)$

§0.2　複素数の四則演算

$z=a+bi, w=c+di, (a,b,c,d$ は実数$)$ とするとき，

$$\begin{aligned} z+w &= (a+bi)+(c+di)=a+c+(b+d)i, \\ z-w &= a+bi-(c+di)=a-c+(b-d)i, \\ zw &= (a+bi)(c+di)=ac-bd+(bc+ad)i, \\ \frac{z}{w} &= \frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2} \end{aligned}$$

§0.3　複 素 平 面

複素数 $z=x+yi$ を xy 平面の点（x,y）に対応させる．そのときの平面を複素平面という．複素数は，複素平面上の 1 点で表される．

§0.4　絶対値と偏角

複素平面の原点とある複素数 $z=x+yi$ を結んだ線分を考える．この線分の長さをこの複素数の絶対値と呼び，$|z|$ とかく．また，横軸の正の部分から始めて，反時計回りにこの線分まで図った角度 θ を偏角と呼び，$\arg(z)$ で表す．

問題 A

1. 次の複素数の実部と虚部を答えよ．

(1) $1+2i$

(2) $-3+i$

(3) $\dfrac{1}{2}-i$

(4) $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{5}$

(5) $-2i$

(6) 4

2. 前問 1 の 6 個の複素数から純虚数を選べ．

3. 実部 $\mathrm{Re}(z)$ と虚部 $\mathrm{Im}(z)$ をそれぞれ次の値とする複素数 z を答えよ．

(1) $\mathrm{Re}(z)=6$，$\mathrm{Im}(z)=3$

(2) $\mathrm{Re}(z)=-\sqrt{2}$，$\mathrm{Im}(z)=\sqrt{2}$

(3) $\mathrm{Re}(z)=\pi$，$\mathrm{Im}(z)=\dfrac{\pi}{2}$

(4) $\mathrm{Re}(z)=0$，$\mathrm{Im}(z)=-1$

4. 次の複素数を $a+bi$ （a,b は実数）の形にせよ．ただし $a=0$ の場合は bi の形にせよ．

(1) $\sqrt{-1}$

(2) $\sqrt{-2}$

(3) $\sqrt{-4}$

(4) $\sqrt{-8}$

(5) $2i+3i$

(6) $5i-3i$

(7) $(1+i)+(3+2i)$

(8) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}i\right)+\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}i\right)$

(9) $(4-2i)-(5+2i)$

(10) $\left(-\dfrac{3}{2}+\dfrac{2}{3}i\right)-\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6}i\right)$

(11) $(3+2i)(1+4i)$

(12) $(6-i)(2+i)$

(13) $\left(\sqrt{2}+i\right)\left(\sqrt{2}-2i\right)$

(14) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}i\right)\left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}i\right)$

(15) $\dfrac{1+i}{1-i}$

(16) $\dfrac{1+3i}{2+4i}$

(17) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}i}{i}$

(18) $\dfrac{1+\sqrt{2}i}{\sqrt{3}i}$

4. 次の不定積分を求めよ ⟨§1.2⟩.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{x+1}\,dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{y}\,dy$ (4) $\displaystyle\int \frac{1}{y-3}\,dy$

(5) $\displaystyle\int \frac{2}{2x+1}\,dx$ (6) $\displaystyle\int \frac{1}{2y+1}\,dy$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{1-x}\,dx$ (8) $\displaystyle\int \frac{1}{2-3y}\,dy$

5. 次の等式をみたす y を x で表せ．ここで対数 log の真数を正の値とする ⟨§1.2⟩.

(1) $\log(y+1) = \log(x+2)$ (2) $\log(y+1) = \log(x+2) + \log x$

(3) $\log(y+1) = 2\log(x-1)$

(4) $\log(y+2) = \log(x-1) + C$ （C は定数）

(5) $\log y = x$ (6) $\log(y-1) = x+2$

(7) $\log(y-2) = x + C$ （C は定数） (8) $\log y = \log(2x+1) + x$

6. 次の微分方程式を解け ⟨§1.2⟩.

(1) $yy' = \dfrac{1}{x}$ (2) $y' = (1+e^x)e^y$

(3) $y' = 4xy$ (4) $(x+1)y' = y-1$

(5) $(2x+1)y' = y-2$ (6) $x^2y' = y^3$

7. 次の微分方程式を解け ⟨§1.3⟩.

(1) $y' = 3\dfrac{y}{x} + 1$ (2) $y' = 2\dfrac{y}{x} - 3\dfrac{x}{y}$

(3) $xyy' = x^2 - y^2$ (4) $y' = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

8. 線形 1 階微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ の一般解が

これらを利用し次の微分方程式の一般解を求めよ ⟨§1.5⟩.

(1) $(xy+1)dx + x(x+y)dy = 0$　　(2) $3y^2 dx + (3xy + 2y^2)dy = 0$

(3) $(2x^2 - y^2)ydx + (x^2 - 2y^2)xdy = 0$

(4) $(4x + 3y^3)ydx + (2x + 5y^3)xdy = 0$

18. クレロー型微分方程式 $y = xp + f(p)$ について次の問に答えよ．ここで $\dfrac{dy}{dx} = p$ とする．

(1) $\dfrac{dp}{dx} = 0$ または $x + f'(p) = 0$ が成り立つことを示せ．

(2) $\dfrac{dp}{dx} = 0$ のとき一般解は $y = Cx + f(C)$（C：定数）となることを示せ．

(3) $x + f'(p) = 0$ に対し p を消去して得られる解を，特異解という．クレロー型微分方程式 $y = xp + (1+p^2)^{\frac{1}{2}}$ の一般解と特異解を求めよ．

19. 質量 m の物体が重力加速度 g の空間を落下している．時刻 t における速度を v，空気抵抗を kv（$k > 0$ は定数）とすると，次の微分方程式が成り立つ．

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

初速度（時刻 $t = 0$ での速度）を 0 とするとき，次の問に答えよ．

(1) 速度 v を t の関数で表せ．

(2) 時刻 $t = 0$ における物体の位置を 0 とする．このとき時刻 t での位置 y を，t の関数で表せ．

20. 2 点で支えられ，たわんでいる糸の形は次の微分方程式で表される．

$$k\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad ：懸垂線の微分方程式$$

ただし x：微小部分の水平位置座標，y：微小部分の高さ，g：重力加速度，ρ：単位長あたりの糸の質量（定数），$k = A/\rho g$，A：張力の水平方向成分（A は定数であることが知られている）とする．この微分方程式について次の問に答えよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = p$ とおき，x と p の変数分離形微分方程式へ変形せよ．

(5) $f(x) = \cos x$　　(6) $f(x) = |x|$

6. 周期 2π の次の関数 $f(x)$ をフーリエ級数展開せよ．また $y = f(x)$ のグラフを描き，偶関数・奇関数・どちらでもない関数のいずれであるかを答えよ．ただし $f(x)$ は 1 周期について示されたものである ⟨§2.1⟩.

(1) $f(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x \leq \pi) \\ 0 & (-\pi < x < 0) \end{cases}$　(2) $f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq \pi) \\ -x & (-\pi < x < 0) \end{cases}$

(3) $f(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x < \pi) \\ 0 & (x = -\pi, 0, \pi) \\ -1 & (-\pi < x < 0) \end{cases}$　(4) $f(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x \leq \pi) \\ -x & (-\pi \leq x < 0) \end{cases}$

(5) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x & (0 \leq x \leq \pi) \\ -\dfrac{1}{2}x & (-\pi \leq x < 0) \end{cases}$　(6) $f(x) = \begin{cases} -x & (-\pi < x < \pi) \\ 0 & (x = -\pi, \pi) \end{cases}$

7. 次のように 1 周期について示された周期関数をフーリエ級数展開せよ．また $y = f(x)$ のグラフを描き，偶関数・奇関数・どちらでもない関数のいずれであるかを答えよ ⟨§2.1⟩.

(1) $f(x) = 2|x| \quad (-1 \leq x \leq 1)$　　(2) $f(x) = |x| \quad (-2 \leq x \leq 2)$

(3) $f(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x < 2\pi) \\ 0 & (x = -2\pi, 0, 2\pi) \\ -1 & (-2\pi < x < 0) \end{cases}$

(4) $f(x) = \begin{cases} 2 & (0 < x < 3\pi) \\ 0 & (x = -3\pi, 0, 3\pi) \\ -2 & (-3\pi < x < 0) \end{cases}$

8. 次の等式を証明せよ ⟨§2.3⟩.

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}$$

（**ヒント**：周期 2π の関数 $g(x) = x^2$（$-\pi \leq x \leq \pi$）のフーリエ級数展開が，次式となることを利用する）

3

第3章 ラプラス変換

§3.1　ラプラス変換

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

§3.2　簡単なラプラス変換

$$\mathcal{L}\{a\} = \frac{a}{s} \qquad (\text{ただし } a = \text{一定}, s > 0)$$

ガンマ関数

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} e^{-u}u^{a-1}du$$

$$\Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1), \quad \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (n \text{ は正の整数})$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

$$\mathcal{L}\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2-a^2} \qquad \mathcal{L}\{\sinh at\} = \frac{a}{s^2-a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2} \qquad \mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}$$

$$\{b\delta(t-a)\} = be^{-as} \qquad (a, b \text{ は定数})$$

問題 A

1. 次のガンマ関数の値を計算せよ $\langle\S 3.2\rangle$.

(1) $\Gamma(4)$ (2) $\Gamma(7)$

(3) $\Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right)$ (4) $\Gamma\left(\dfrac{9}{2}\right)$

2. 次の関数のラプラス変換を求めよ $\langle\S 3.2\rangle$.

(1) 1 (2) $\dfrac{2}{3}$

(3) t (4) t^2

(5) t^3 (6) t^4

(7) e^t (8) e^{5t}

(9) e^{-2t} (10) e^{-3t}

3. 次の関数のラプラス変換を求めよ $\langle\S 3.2\rangle$.

(1) $\cosh t$ (2) $\cosh(-3t)$

(3) $\sinh 2t$ (4) $\sinh\left(-\sqrt{2}t\right)$

(5) $\cos t$ (6) $\cos 3t$

(7) $\sin t$ (8) $\sin 2t$

(9) $\cos(-\sqrt{5}t)$ (10) $\sin(-\sqrt{3}t)$

(11) $\delta(t)$ (12) $2\delta(t)$

(13) $\delta(t-3)$ (14) $3\delta(t-1)$

4. 次の関数のラプラス変換を求めよ $\langle\S 3.3.1\rangle$.

(1) t^2+3t+1 (2) $2t^3-t+4$

(3) e^t+e^{-2t} (4) $e^{3t}-5e^{2t}+1$

(5) $\displaystyle\int_{i}^{1+3i} \cos\frac{\pi}{2}z dz$ (6) $\displaystyle\int_{0}^{\pi i} \sinh 5z dz$

(7) $\displaystyle\int_{0}^{\pi i} \sin^2 z dz$ (8) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}i} \sin 3z \cos 3z dz$

(9) $\displaystyle\int_{-i}^{\frac{1}{2}i} z \sinh \pi z^2 dz$ (10) $\displaystyle\int_{0}^{\pi+i} z\cos 2z dz$

6. 次の積分を，コーシーの積分公式やグルサーの定理に出てくる公式を使って求めよ ⟨§4.8.3, §4.8.5, §4.8.6⟩.

(1) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z}dz$, C：円 $|z| = 1$ を反時計回りに 1 周

(2) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z-1}dz$, C：円 $|z-1| = \dfrac{1}{3}$ を反時計回りに 1 周

(3) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z-1}dz$, C：円 $|z| = \dfrac{1}{3}$ を反時計回りに 1 周

(4) $\displaystyle\int_C \frac{e^{iz}}{z-3i}dz$, C：円 $|z-3i| = 2$ を反時計回りに 1 周

(5) $\displaystyle\int_C \frac{\sin\frac{\pi}{2}z}{z-1}dz$, C：円 $|z-3i| = 1$ を反時計回りに 1 周

(6) $\displaystyle\int_C \frac{z+i}{z^2}dz$,
C：$i, -1-i, +1$ を頂点とする三角形の辺を反時計回りに 1 周

(7) $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{(z+\pi i)^2}dz$,
C：$2\pi(\pm 1 \pm i)$ の 4 点を頂点とする正方形の辺を反時計回りに 1 周

(8) $\displaystyle\int_C \frac{\cos 2\pi i z}{(z-i)^2}dz$, C：円 $|z-1-i| = 2$ を反時計回りに 1 周

(9) $\displaystyle\int_C \frac{e^{-3z}}{(z+i)^3}dz$, C：円 $|z| = 2$ を反時計回りに 1 周

(10) $\displaystyle\int_C \frac{5z^3-2i}{z^4}dz$,
C：$i, -1-i, +1$ を頂点とする三角形の辺を反時計回りに 1 周