

まえがき

昨今、確率・統計関連の和書の出版は数多く、扱っているレベルも様々で、自分の将来の目的に合わせて初めて学習するのにどの本を選べばよいのか書店に行って悩んだ経験のある方は多いのではないだろうか。最近では、特にビッグ・データや機械学習・人工知能 (AI) といった分野で統計学が重要とされ、その前提知識となる確率論の本も需要が高い。ところが確率論の教科書も千差万別で、高校レベルの知識で理解できるような初等的なものから、測度論 (ルベグ積分) を前提として書かれたものまで幅広い。

実際のデータを解析する際、統計的手法を単にユーザーとしての立場で使うだけなら本格的な確率論からしっかり学ぶ必要もないかもしれない。データ加工の技術を習得し、統計ソフトにデータを放り込んで、出てきた結果を解釈する術を身に着ければそれなりの意思決定は可能である。しかし、その統計的判断が本当に適切なかどうか誰も考察できないような状況下で盲目的に統計手法を用いるのは危険である。

多くの統計的手法は、サンプルをたくさん集めたときに見えてくるある種の近似的な確率モデルを利用して作られており、それらを正当化する統計理論を「大標本理論」と呼ぶ。サンプル数 n を大きくしたとき、 $n \rightarrow \infty$ の極限に現れる分布 (確率モデル) をデータ発生の法則と考えて、それを基に統計手法が構築されている。したがって、前提条件を間違えればデータの分布を間違えることになり、結果、データを集めれば集めるほど“ほとんど確実に”判断を間違えるということにつながってしまう。

特に、機械学習などで相関のある大量のデータを扱ったり、過去のデータの影響を受けながら時系列的にデータが増えていくような複雑な従属構造を持つデータ (確率過程) を解析するには、その統計理論を作るために、測度論をベースにした本格的な確率論の知識が必須であり、いわゆる「測度論的確率論」と

いう現代確率論を知らなければ、それらの統計理論の本質を理解することはできない。しかし、「測度論」→「確率論」→「統計学」のような手順を踏んでいくには時間がかかる。

本書は、本格的な数理統計学を目標とする読者向けに、特に統計学で重要となる事柄に重点をおき、速習的に確率論を学ぶことができる学部生向け教科書を目指した。微積分、線形代数と集合演算に関する多少の知識のみを前提とし、確率論を学びながら測度論の重要ポイントを押さえることにより、基礎となる理論の内容をおろそかにすることなく、最短経路で「測度論的確率論」の概略をつかみ、その先の「大標本理論」にスムーズに移行できるよう、その橋渡しとなることを目標とした。

特に、確率空間や確率変数の捉え方、スティルチェス積分としての期待値、概収束に関する様々なテクニックを取り上げるなど、統計学や具体的な応用分野に進む際に知っておいた方がよいと思われる事項に多くの紙数を割き、数学的には重要であっても、応用の立場からは後で学習すればよいと思われる事項については恐れずに省略することで、短時間で本格的な理論を一通り学習できることを目指して執筆を試みた。これくらいの概略を知っていれば、あとでじっくり測度論や確率論を勉強しようとする際にもスムーズに独習できるだろうし、たとえこの辺りの理解に留めておいても応用上は十分であろうかと思われる。

確率論の後には統計学を、そして本書では、その先の「統計的漸近理論(大標本理論)」への応用までを見据え、確率論の標準的な教科書ではあまり触れられないが、統計学では極めて有用となる漸近理論のテクニックを取り上げ、大学院のゼミなどで本格的な数理統計学の専門書にチャレンジしていくための下地を作りたい学部生向けのセミナーなども想定している。その他、統計学を初等的に学んだだけでは気づきにくい点や、初学者が誤解しそうな点、例えば、筆者が学生時代に誤解していたことなど、躓きやすいポイントをより詳しく解説するように努めたつもりである。

このような内容の執筆を思ったのは、早稲田大学基幹理工学部・応用数理学科における3年生向けの通年講義「確率統計概論」を授業したことがきっかけである。この講義は、前期に確率論の入門的講義を行い、それを後期の数理統計学につなげ、さらには確率過程論、経済・ビジネスの確率モデル、金融・保

険数理、情報理論や学習理論など、漸近統計を用いる応用分野へと橋渡しする役目を担っている。

このような応用分野では、期待値がスタイルチェス積分で書かれていたり、様々な確率的な収束の概念が必要だったり、 σ -加法族に関する条件付期待値が出てきて“初等的な”条件付期待値との違いに困惑したり、初等的な確率統計の教科書を学んだだけではわからないことがたくさん出てきて、単に積分計算ができるだけでは何もわからない。

このような概念を理解するには、やはり測度論をしっかりと学んでから確率へ、統計へ、そしてその先へと進むべきところである。しかし、本学科の学生たちにすれば、数学を応用する立場で素早く理論の概略をつかみ現象や実データへの応用を試みねばならないし、その上数学的な証明の技術も要求されるため、卒業までの短い期間に理論と応用双方を理解して論文を書くレベルに持つていくには、数学科のようにじっくりと理論を学んでからとは言ってられないところがある。そこで、確率論の測度論的な基礎数理部分の理解をおろそかにすることなく、短時間で統計関連分野への応用に持つていくために、自然と本書のような構成に至ったわけである。

因みに筆者の3年生向け講義では、前期で5章(中心極限定理)までの内容を教え、後期では6章の「 σ -加法族に関する条件付期待値」で初等的な条件付期待値との関連から初めて「マルチンゲール」などの確率過程論を教えたり、金融・保険数理などのその他講義へと解析的に接続している。6章以降の内容は場合によっては大学院レベルだが、特に漸近統計や確率過程の統計学を学ぶ上で、知っていると極めて有用な事項である。本書1冊の知識を携えていけば、どのような確率統計の応用分野へ飛び出していっても、おおかた大丈夫であろう。

本書を執筆・出版するにあたり、当時拙研究室の学生であった、青木徳誠、市川真名、坂本創汰、繁村快志、野上美幸、南優希の各氏、および教育学部数学科の内野圭輔、長山尚平の両氏、また助教(当時)の藤森洸氏には、ゼミを通して丁寧に原稿を読んでいただき、誤植の発見はもとより、主に学生視点としての忌憚のない意見や助言を数多くいただき、さらに演習問題の解答の作成にもご協力いただいた。また、当時修士課程に在籍した齋藤良太氏、瀬川絢哉氏には $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ による図の作成を手伝っていただき、こちらの細かい要求にも即座に応

えていただいた。これらの各氏には深く感謝申し上げます。さらに、内田雅之氏(大阪大学)、鎌谷研吾氏(大阪大学)、荻原哲平氏(統計数理研究所)、小池祐太氏(東京大学)(所属はいずれも当時のもの)の各氏には、プロの研究者としての立場から原稿に目を通していただき、貴重な助言や改善点、誤りについてご指摘いただいた。これらの方々のご助力なくしてはこの本の完成はなかったものであり、この場を借りて心より御礼を申し上げます。

私は本の執筆開始から完成までの間、家族にはそのことをいつも内緒にする。そのため、私がこの執筆に集中するあまり、家族には時として多くの時間的犠牲や無駄な労働を強いたかもしれず、彼女らからすれば少なからず理不尽さも感じたかもしれない。また、そのことで彼女らから多くの楽しみを奪っていたかもしれない。もしそうであったとしたら、ここに密かにお詫び申し上げる次第である。しかしながらそのことは自覚し、良い本を作ろうと努力し、ついに完成に至ったのであり、これを家族にも捧げるものである。

最後に、本書執筆の機会をくださり、足繁く拙研究室をご訪問いただきながら出版まで導いてくださった内田老鶴圃の内田学氏、およびその編集部の方々には深く感謝の意を表したい。

2019年3月

清水 泰隆

第2版によせて

本書は、筆者が昔から思い続けてきた「このような確率論の教科書がほしい」という構想を実現したものです。自身は数学の理解が遅い方なので、その自分が理解してきたイメージをすなおに言葉にすれば一般のお役に立てるのではないかと思ったのです。昔書物だけではわからずに苦勞したこと、統計学の道具が確率論の和書になかなか見つからないこと、初学者の盲点、そのようなことが解決できる本を目指しました。出版後、授業で教科書や参考書にご指定頂いたり、輪読セミナーなどを開催して頂いたりする中で各方面から多くのコメントを頂き、みな昔の私と同じような疑問を持っていたのだということを実感するに至りました。同時に、本書をより良くせねばという思いに強く駆られ、出版社の方のご苦勞も省みず大幅な誤植の修正を断行しました。

皆さまに細かく読んで頂くにつれて、小さなタイポ以外にも、証明における細部の誤りなど、いろいろ無視できない事象が判明してきました。「本質的な点における誤植の存在確率は、それ以外での存在確率より有意に大きい」というのは教科書普遍の法則として経験的に知られて(?) いますが、それだけに僅かな誤植の存在が大幅な理解の妨げになったりすることがしばしばあります。

本書第2版では、タイポの修正のほか、定理の証明もいくつか大幅に修正し、それに伴う論理的不整合を正すべく定義や定理のステートメントも若干変更するなど、改訂に近い修正を行いました。これらは全て筆者の責任とはいえ、誤った理解を定着させないためにも第2版もぜひお手元に置いて頂き、今後の統計科学研究の一助としていただけますと誠に幸甚です。

2021年6月

清水 泰隆