計算力をつける

応用数学

魚橋慶子・梅津　実
共著

内 田 老 鶴 圃

まえがき

本書は，数学を主に道具として使う理工系学生のための応用数学の入門書である．応用数学として扱われる分野は幅広い．その中でも大学・高専で学ぶことの多い常微分方程式，フーリエ・ラプラス解析，複素関数の分野に絞り，計算問題を中心として解説した．また工業高校などからの入学者を想定し，複素数の四則演算を学習していなくとも無理なく本書を読めるよう配慮した．

第 0 章では，複素数の基本的な性質を復習する．四則演算，複素平面，オイラーの公式などについての計算練習を行う．これらは本書を通じて必要となる事項を列挙したものであり，高校の内容から大学の内容までを扱っている．しかし高校にて複素数の学習を行っているとしても，常微分方程式やラプラス変換に現れる大学レベルの複素数計算に困る学生は多い．大学によっては，先に常微分方程式，ラプラス変換の履修，次に複素解析の履修というカリキュラムであることが理由の 1 つであろう．その場合も第 0 章を参照し，無理なく応用数学を学習できるよう配慮した．

第 1 章では，常微分方程式の解法を学ぶ．身の周りの現象を表す簡単な方程式を導入とし，主として線形常微分方程式の解法を具体的に計算練習する．

第 2 章では，フーリエ級数展開ならびにフーリエ変換について学習する．これらフーリエ解析の概念をイメージ付けるため，具体的な計算に力点を置く．

第 3 章では，ラプラス変換について学習する．ラプラス変換は電気回路理論，制御工学，建造物の振動解析などの分野で利用される．ここでは諸分野で必要となるラプラス変換公式や計算法について学習する．

第 4 章では，複素関数の微分積分について基礎的な事項を学ぶ．内容としては第 0 章の続きであり，第 1 章から第 3 章までを飛ばして学習することができる．複素関数とは何かから始まり，留数定理による積分などを学習する．

本書は，微分積分学の初歩ならびに線形代数学の初歩に続いて学習することを想定している．計算問題へ力を注いだ分，厳密な証明を思い切って省略した．しかし，内

田老鶴圃発行の「計算力をつける微分積分」,「計算力をつける線形代数」と比べれば，定理・公式の解説は若干多い．それは学習段階が進み，暗記するには複雑な定理・公式が増えるため，“解説ごと” 頭へ入れるほうが楽であろうと考えたからである．さらに定理・公式の意味を思い浮かべ，他の専門科目の学習が進むことを願ってのことである．とはいえ，まず本文中の練習問題を，例題を参考に解いてみよう．一度で解けない場合は繰り返し解いてみよう．章末問題には，本文中に類題のない問題もある．その場合も，関連しそうな公式・定理を紙に列挙し，解法の手掛かりを自分で見つける練習をしよう．

最後に，本書出版の機会をくださった内田老鶴圃社長の内田学氏，執筆に関する数々の相談に乗っていただいた東北学院大学工学基礎教育センター所長の足利正教授，そして，本書を「計算力をつける微分積分」,「計算力をつける線形代数」の姉妹書とすることを快諾くださった同大学工学部神永正博准教授へ感謝を申し上げたい．

2011 年 2 月

魚橋慶子・梅津　実

目　　次

第3章　ラプラス変換

第4章　複 素 関 数

問の略解・章末問題の解答

第0章 複　素　数

0.1　複素数とは

実数については，もうよく知っていると思う．整数や，少数や，分数や，円周率や，負の数，平方根などである．例をあげると，

$$0, -1, 100, \frac{3}{7}, 0.598, \pi, -\sqrt{11}, \cdots\cdots$$

などである．これらは，すべて 2 乗すると 0 以上の数になり，負の数になることはない．私たちが実際に使う数はこの実数で十分であるが，2 乗して負になる数を導入しておくと便利なことがある．

2 乗すると -1 となる**虚数単位** i を導入する．

$$i^2 = -1$$

この虚数単位 i を用いて，**複素数**を次のように定義する．

$$\text{複素数}\quad z = x + yi = x + iy \qquad (\text{ただし } x, y \text{ は実数}) \tag{0.1}$$

この x 部分と y 部分には，次のように名前が付いている．

$$\textbf{実部}\quad x = \mathrm{Re}(z) \qquad \textbf{虚部}\quad y = \mathrm{Im}(z)$$

Re は real part の，Im は imaginary part の略である．

例 0.1

$$z = -1 + \sqrt{3}i \text{ の場合}\quad \mathrm{Re}(z) = -1,\ \mathrm{Im}(z) = \sqrt{3} \qquad \square$$

さて，$y = 0$ のときには，z は x のみであるから実数になる．したがって実数も複素数の一種である．また，$x = 0$ のときには z を**純虚数**という．

0.2 複素数の四則演算

さて，この複素数はどのように計算するかであるが，いたって簡単である．次に例をあげてみよう．

例題 0.2 **複素数の四則演算の例** 次の複素数を $a+bi$ $(a, b$ は実数$)$ の形に直せ．

(1) $(2-5i)+(4+3i)$ (2) $(1+6i)-(4-2i)$ (3) $(3+2i)(2-3i)$

(4) $\dfrac{5+4i}{2+i}$

（解）

(1) $(2-5i)+(4+3i)=2-5i+4+3i=2+4+(-5+3)i=6-2i$

(2) $(1+6i)-(4-2i)=1+6i-4+2i=1-4+(6+2)i=-3+8i$

(3)
$$\begin{aligned}(3+2i)(2-3i)&=3\times 2+2\times 2i-3\times 3i-2\times 3i^2=6+4i-9i+6\\&=6+6+(4-9)i=12-5i\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}\frac{5+4i}{2+i}&=\frac{(5+4i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{10+8i-5i-4i^2}{2\times 2+2i-2i-i^2}\\&=\frac{10+4+(8-5)i}{4+1}=\frac{14+3i}{5}=\frac{14}{5}+\frac{3}{5}i\end{aligned}$$
□

つまり，i をひとまず文字であると思って計算する．そして i^2 が出てきたら -1 に置き換えるのである．分数の場合は，分母の虚部の符号を変えたものを分母分子に掛けるという方針で計算している．これは，複素数の定義 (0.1) は，分母に複素数は現れていないので，この決めた形にしているのである．このやり方は，i を $\sqrt{-1}$ とかいてみると，分母に $\sqrt{2}$ などの無理数がある場合の有理化の方法と同じである．

問 1 次の複素数を $a+bi$ $(a, b$ は実数$)$ の形にせよ．

(1) $(3+5i)+(1-2i)$ (2) $(5-3i)-(3-2i)$

(3) $(6-2i)(-3+4i)$ (4) $\dfrac{2+5i}{3-2i}$

計算は実数と同じ要領でよいのだが，実数と複素数には大きな違いがある．それは，実数でない複素数では大小関係はないということである．

$$2i<3i \quad \text{や} \quad 1+5i>2+\sqrt{2}i$$

は無意味なのである．もう少しくわしく言うと，矛盾のない大小関係を複素数に対して決めることができないということである．

0.3　複素数の図示

実数と直線上の点を対応させることができる．また平面上の点の位置を xy 平面に，x 座標や y 座標を用いて表すことができ，そのことを使ってグラフなどをかき，関数を直感的に分かりやすくできる．そこで，複素数もそのように，対応させて考えることにする．複素数には実部と虚部の 2 つの数があるので，$z = x + iy$ と xy 平面上の点 (x, y) を対応させて考える．このときの平面を，**複素平面**，**複素数平面**，**ガウス平面**などと呼ぶ．また，軸も横軸は**実軸**，縦軸は**虚軸**と呼ぶ．実軸と虚軸を逆にしてかいてはいけない．

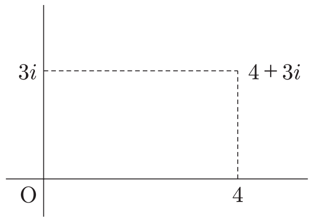

図 0.1

つまり，$4 + 3i$ という複素数には，xy 平面での $(4, 3)$ という点を対応させて考えるのである．複素平面の目盛のかき方はいろいろとあるが，この本では縦軸の目盛に i をつけておくことにする．

0.4　複素数の極形式（極表示）

x 座標と y 座標を使うほかにも，平面上の点を表す方法はある．これからよく使うのは**極座標**である．これは，点の位置を原点からの距離 r と，ある決まった所から原点の周りに反時計回りに計った角度 θ で表すものである．ここで反時計回りというのは，時計の針の動く向きと反対の向きのことである．左回りとか，右回りでは混乱するので，このように呼ぶ．角度の基準とするところは x 軸の正の部分で，そこで角度を 0 とする．この極座標 r, θ と x, y 座標との間には，次のような関係がある（図 0.2）．

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \tag{0.2}$$

(0.1) へ (0.2) を代入すると次のようになる．

$$\boxed{z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)} \tag{0.3}$$

これを**極形式**と呼ぶ．似ているが $r(\cos\theta - i\sin\theta)$ は極形式ではない．r を複素数の絶対値と呼び，次のような式が成立する．

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| \tag{0.4}$$

また，θ を**偏角**と呼び，次のようにかく．

$$\theta = \arg(z) \tag{0.5}$$

z が決まれば，r は1つに決まる．しかし θ は 2π の整数倍だけの不定性がある．これは，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ が周期 2π の周期関数であることによる．$-\pi < \theta \leq \pi$ または $0 \leq \theta < 2\pi$ へ制限して使うこともある．

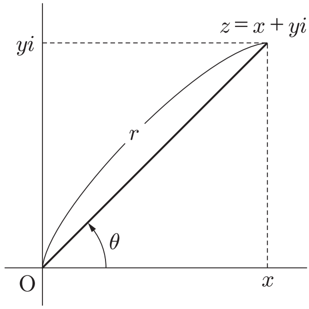

図 0.2

いくつかの細かい注意を説明する．

注意 0.3

- $z = x + iy = 0$ というのは $|z| = 0$ を意味する．つまり $x^2 + y^2 = 0$ であるから，この条件は $x = y = 0$ を意味する．
- $z \to \infty$ は $|z| \to \infty$ のことである．x, y の両方あるいは片方が $\pm\infty$ になる．どちらかが無限大になるかくわしくかくときには，$a + \infty i$ のようにかく．
- $z = a+bi, w = c+di$（ただし a, b, c, d は実数）のとき，$z = w$ ならば $a = c, b = d$（実部同士，虚部同士がともに等しい）である（逆も正しい）．

ラジアン

ここで角度が出てきたが，この本では角度は度を使わずに，**弧度法**つまり**ラジアン**で表すことにする．それは，ラジアンで角度を表しておくと微分積分の公式が簡単になり，計算間違いを防げるからである．弧度法では，円周上の弧の長さと半径の比で角度を表す．

中心角 θ に対応する，円周上の弧の長さを l，円の半径を r とすると

$$\theta = \frac{l}{r}$$

である．円周は $2\pi r$ であるから次が成り立つ．

$$\theta = 360^\circ \text{のとき} \quad \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$
$$\theta = 180^\circ \text{のとき} \quad \frac{\pi r}{r} = \pi$$
$$\theta = 90^\circ \text{のとき} \quad \frac{\pi}{2}$$

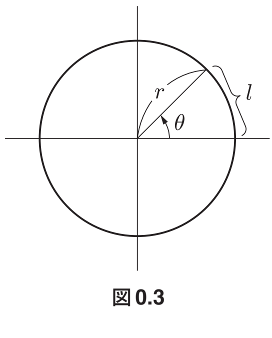

図 0.3

つまり z でかくと

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\{\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)\}$$

であるので

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \left[\frac{1}{r}\{\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)\}\right]^n = \frac{1}{r^n}\{\cos(-n\alpha) + i\sin(-n\alpha)\}$$

となる．

例題 0.5 $(-1+\sqrt{3}i)^{10}$ をド・モアブルの公式を使って計算せよ．

（**解**）

$$\text{絶対値}\quad r = |-1+\sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

また，図 0.5 より

$$\text{偏角}\quad \theta = \arg(z) = \frac{2}{3}\pi + 2n\pi \qquad (n = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

であることが分かる．極形式でかくと

$$-1+\sqrt{3}i = 2\left\{\cos\left(\frac{2}{3}\pi + 2n\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi + 2n\pi\right)\right\}$$

と書ける．ド・モアブルの公式を使うと

$$\begin{aligned}
(-1+\sqrt{3}i)^{10} &= \{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^{10} = r^{10}\{\cos 10\theta + i\sin 10\theta\} \\
&= 2^{10}\left\{\cos 10\left(\frac{2}{3}\pi + 2n\pi\right) + i\sin 10\left(\frac{2}{3}\pi + 2n\pi\right)\right\} \\
&= 2^{10}\left\{\cos\left(\frac{20}{3}\pi + 20n\pi\right) + i\sin\left(\frac{20}{3}\pi + 20n\pi\right)\right\} \\
&= 2^{10}\left\{\cos\left(\frac{20}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{20}{3}\pi\right)\right\} \\
&= 2^{10}\left\{\cos\left(\frac{2}{3}\pi + 6\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi + 6\pi\right)\right\} \\
&= 2^{10}\left\{\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right\} \\
&= 2^{10}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2^{10}\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) \\
&= 1024 \times \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) = 512(-1+\sqrt{3}i)
\end{aligned}
$$

となる． □

ここで $\sin\theta$ や $\cos\theta$ は，周期が 2π の周期関数であるということを使った．10 回掛け算をするよりは，少し計算が楽になるのが分かる．

問 3　ド・モアブルの公式を用いて，次の複素数の計算をせよ．

(1) $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ のとき，z^6　　(2) $z = 1 - \sqrt{3}i$ のとき，z^5

(3) $z = \sqrt{3} - i$ のとき，$\left(\dfrac{z}{|z|}\right)^{20}$

0.7　共役複素数

z の**共役**(きょうやく)**複素数**とは，z の虚部の符号を変えたものであり，$\overline{z}$ で表す．式でかくと x と y を実数とするとき

$$
\boxed{z = x + yi \quad \text{ならば} \quad \overline{z} = x - yi} \tag{0.13}
$$

である．z の上の棒を虚部の符号を変えるという操作を意味する記号と思えばよい．これによると，$\overline{z}$ の虚部 $-y$ の符号を変えて y にしたものが，$\overline{z}$ に共役な複素数であるから

$$
\boxed{\overline{\overline{z}} = \overline{x - yi} = x + yi = z} \tag{0.14}
$$

という公式が成り立つ．また

$$
\boxed{|\overline{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| = r} \tag{0.15}
$$

となる．

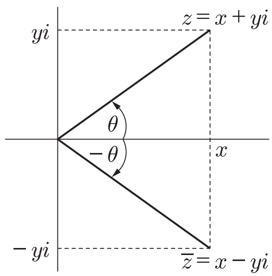

図 0.8

また z と $\overline{z}$ は，複素平面上で実軸に関して対称である．つまり，この 2 つの複素数の点は実軸からの距離が等しく，実軸を挟んでちょうど反対側になる．すると実軸と z のなす角と，実軸と $\overline{z}$ 軸のなす角度の大きさは同じで，向きが反対であるから

1

第 1 章　常微分方程式

1.1　微分方程式とは

未知関数とその導関数を含む方程式を**微分方程式**という．未知関数を表す独立変数が 1 つのとき**常微分方程式**という（変数が 2 個以上であり，偏導関数を含む方程式を偏微分方程式という）．また微分方程式に含まれる導関数の最高次数を微分方程式の**階**という．

本章では常微分方程式を学習する．しかし単に微分方程式と記す場合があるので注意すること．

例 1.1　(1)　自由落下する物体の，時刻 t における原点からの距離を y（$y > 0$）とする．重力加速度を g とすれば物体の運動は

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g \tag{1.1}$$

という 2 階常微分方程式で表される．両辺を変数 t で不定積分すると

$$\frac{dy}{dt} = gt + v_0 \qquad (v_0 \text{ は定数}) \tag{1.2}$$

となる．さらに不定積分すると

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + C \qquad (C \text{ は定数}) \tag{1.3}$$

である．式 (1.3) のように関数 y を導関数を使わずに表したものを微分方程式の解という．

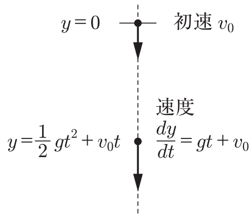

図 1.1　$C = 0$ の場合

条件が与えられた場合の解を考えよう．時刻 $t = 0$ のとき，式 (1.2) の右辺は v_0 である．ゆえに定数 v_0 は初速を表す．時刻 $t = 0$ のとき，式 (1.3) の右辺は C で

ある．ゆえに定数 C は物体の初期位置を表す．この例では原点が初期位置であるから $C=0$ であり，微分方程式の解は

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$$

となる．さらに初速 $v_0 = 0$ ならば，解は次のようになる．

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \tag{1.4}$$

式 (1.3) のように任意の定数を用いて表された解を**一般解**という．式 (1.4) のように特定の定数に対する解を**特殊解**という．

(2)　原点中心，半径 c（$c>0$）の円 $x^2+y^2=c^2$ を考えよう．y を x の関数とみなすとき，両辺を x で微分した式

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{両辺を 2 で割り} \quad x + y\frac{dy}{dx} = 0 \quad (x + yy' = 0) \tag{1.5}$$

は，円を表す 1 階常微分方程式である．またあらゆる半径 c に対し同様に計算できるため，微分方程式 (1.5) は**円群の方程式**とも呼ばれる．

さらに変形した式

$$\frac{y}{x}\frac{dy}{dx} = -1 \tag{1.6}$$

は，円の接線が半径に垂直であることを示している．項 y/x が円の中心と点 (x, y) とを結ぶ半径の傾きを示し，項 dy/dx が円周上の点 (x, y) での接線の傾きを示すからである．

逆に微分方程式 (1.5)（または (1.6)）の解は，$x^2 + y^2 = c^2$ であると考えることができる．“$y =$” の形ではないが，円の微分方程式をみたすので解と呼ばれる．□

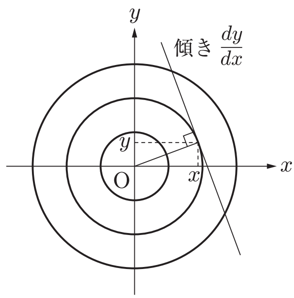

図 1.2

注意 1.2　導関数 dy/dx，dy/dt を y' と表すことがある．また導関数 d^2y/dx^2，d^2y/dt^2 を y'' と表すことがある．

問 1　次の微分方程式を解け.

(1) $y' = 2$　(y は t の関数)　　(2) $y'' = 9.8$　(y は x の関数)

(3) $\dfrac{d^3y}{dx^3} = a$　(a は定数)

問 2　次の曲線を表す微分方程式を求めよ．ただし c, p を任意の定数とする.

(1) 円 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = c^2$ $(c > 0)$　　(2) 楕円 $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = c^2$ $(c > 0)$

(3) 双曲線 $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = c^2$ $(c > 0)$　　(4) 放物線 $y^2 = 4px$ $(p > 0)$

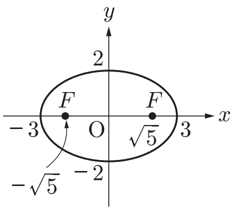

図 1.3　楕円 $(c = 1)$

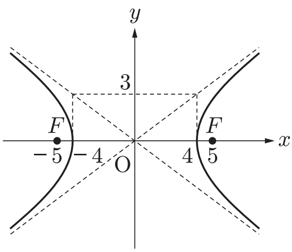

図 1.4　双曲線 $(c = 1)$

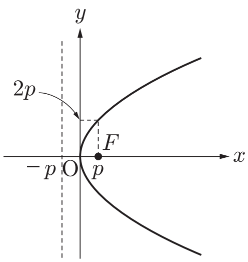

図 1.5　放物線
(破線は準線)

微分方程式を使えば“変化率”や“接線の傾き”についての関係式を容易に表すことができる.

問 3　次の性質をもつ曲線または関係を微分方程式で表せ.

(1) 曲線 S 上の各点 P における接線が線分 AP に直交するときの，曲線 S (ただし点 A の座標を $(3, -1)$ とする) を表せ.

(2) 総量 y の変化率が各時刻での y に比例する物質に対し，時刻 t と総量 y との関係を表せ.

(3) 個数 y の増加率が各時刻での y の 2 乗に比例する微生物に対し，時刻 t と個数 y との関係を表せ.

1.2　変数分離形

微分方程式の“形”と対応する解法を各節にて説明する．

次の形の微分方程式を**変数分離形微分方程式**と呼ぶ．

$$\boxed{g(y)\frac{dy}{dx} = f(x) \qquad \left(\text{または}\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}\right)}$$

変数分離形の解法

$$\begin{aligned} g(y)dy &= f(x)dx & &\text{：変数を分離} \\ \int g(y)dy &= \int f(x)dx + C & &\text{：両辺を積分} \end{aligned}$$

[**解説**]　式 $g(y)dy/dx = f(x)$ の両辺を x で積分すると

$$\int g(y)\frac{dy}{dx}dx = \int f(x)dx + C$$

である．置換積分の公式を用いると $\displaystyle\int g(y)dy = \int f(x)dx + C$ が得られる．　□

注意 1.3　式 $dy/dx = f(x)/g(y)$ が与えられる場合，明らかに $(x$ の式$)/(y$ の式$)$ と分かる形のみが $f(x)/g(y)$ であるとは限らない．式

$$\frac{(x+1)y}{xe^y}$$

は，

$$f(x) = \frac{x+1}{x}, \quad g(y) = \frac{e^y}{y}$$

とすれば，$f(x)/g(y)$ の形とみなされる．

注意 1.4　不定積分の任意定数 C_1, C_2 を

$$\int g(y)dy + C_1 = \int f(x)dx + C_2$$

のように両辺へ置いてもよい．しかし C_1 を右辺へ移項し $C_2 - C_1 = C$ のようにまとめることができる．以後もできる限り少ない個数の定数を用いる．

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

は変数変換 $u = y^{1-n}$（$n \neq 0, 1$）により線形微分方程式となることを示せ（**ヒント**：$u' = (1-n)y^{-n}y'$）．

(2) $y' - xy = xy^2$ の一般解を求めよ．

［**5**］ 微分方程式 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ の両辺へある関数 λ を掛けると完全微分方程式へ変形できる場合がある．関数 λ を**積分因子**といい，例えば次の場合がある．

$$\text{(a)}\ \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \phi(x)\ \text{（}x\text{ のみの関数）ならば}\ \lambda = e^{\int \phi(x)dx}$$

$$\text{(b)}\ \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \psi(y)\ \text{（}y\text{ のみの関数）ならば}\ \lambda = e^{-\int \psi(y)dy}$$

これらを利用し次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $(x + y^2)dx + xydy = 0$　　(2) $y^2dx + (xy + y^2 + 1)dy = 0$

［**6**］ 微分方程式 $y' = f(ax + by + c)$（a, b, c は定数．$b \neq 0$）は変数変換 $u = ax + by + c$ により変数分離形となることを証明せよ．

［**7**］ 微分方程式 E：$yy' = xy'^2 + 1$ について，次の問に答えよ．

(1) $y = Cx + \dfrac{1}{C}$（C は任意定数）は微分方程式 E の解であることを確認せよ．

(2) $y^2 = 4x$ は微分方程式 E の解であることを確認せよ．

注意：解 $y^2 = 4x$ のように，一般解の任意定数 C をどのような値としても表せない解を**特異解**という．また特異解のグラフは，どの一般解のグラフにも接しているため**包絡線**と呼ばれる．

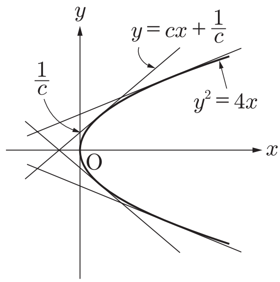

図 1.6

［**8**］ 放射性物質 A が自然崩壊する速さは各時刻 t（単位 [年]）での残存量 y に比例する．物質 A の半減期（残存量が半分になるまでの時間）が 100 年であるとき，次の問に答えよ．

(1) 比例定数を k（$k < 0$）として，y と t の関係を微分方程式で表せ．

(2) 比例定数 k の値を求めよ．ただし $\log 2 = 0.6931$ とする．

(3) 物質 A の量がもとの量の 1% になるまで何年かかるか．ただし $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする．

［**9**］ 抵抗 R，コイル（インダクタンス）L，起電力 E を直列接続する（R, L, E：定数）．回路のスイッチを閉じた時刻を $t = 0$ とする．すると電流 I と時刻 t は次の微分方程式をみたす．

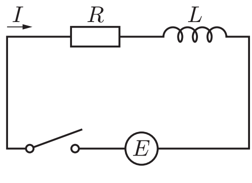

図 1.7

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx dx$$
$$= 0 + 0 + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = b_k \pi$$

である．すなわち

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx$$

が成り立つ．ここで文字 k を n に取り換えると次のようになる．

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \qquad \square$$

注意 2.2　関数 $f(x)$ の不連続点において，フーリエ級数展開の無限和はもとの関数の値に近づくとは限らない．本書では，無限和が連続点でもとの関数の値に近づくという意味を，等号を用いて $f(x) =$（フーリエ級数）と表す．書籍によっては，等号が成り立たない場合を考慮し $f(x) \sim$（フーリエ級数）と記している．

注意 2.3　フーリエ級数展開の第 1 項を $a_0/2$ ではなく a_0 と記す書籍がある．その場合は $a_0 = (1/2\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ となる．本書では a_0 と a_n の形をそれぞれ $(1/\pi) \times$（積分）に揃えるため，第 1 項を $a_0/2$ とする．

電気信号の波形をフーリエ級数展開した場合，$a_n \cos nx$, $b_n \sin nx$ は第 n 次高調波と呼ばれる．

例題 2.4　周期 2π の関数

$$f(x) = \begin{cases} x & (0 \le x \le \pi) \\ 0 & (-\pi < x < 0) \end{cases}$$

をフーリエ級数展開せよ．ただし上記は 1 周期について示したものである．

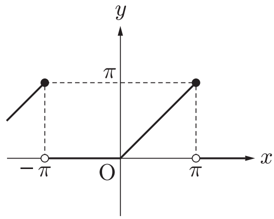

図 2.1

（**解**）　フーリエ係数を計算すると次のようになる．

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi} xdx\right) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\cdot\cos nx dx + \int_{0}^{\pi} x\cos nx dx\right)$$

$$(n = 1, 2, \cdots)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[x\cdot\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{1}{n}\sin nx dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi} = \frac{1}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) = \frac{1}{n^2\pi}\{(-1)^n - 1\}$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{2}{n^2\pi} & (n = 2k-1) \\ 0 & (n = 2k) \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

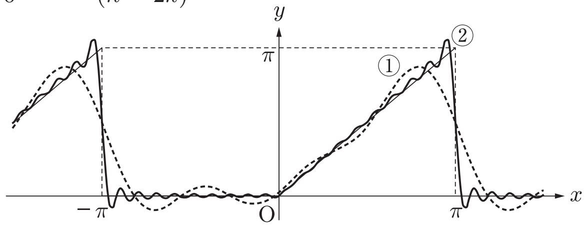

図2.2

① $n = 3$ $(k = 2)$ までの和，② $n = 19$ $(k = 10)$ までの和

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\cdot\sin nx dx + \int_0^{\pi} x\sin nx dx\right) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[x\cdot\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi\cos n\pi}{n} + \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi}\right) = -\frac{1}{n}(-1)^n = \frac{1}{n}(-1)^{n+1}$$

したがって，フーリエ級数は

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\right)$$

$$+ \left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-1)^{n+1}\sin nx. \qquad \square$$

以後，周期関数の表示において“1 周期について示したものである”という注意書きを省略する．

例題 2.13　偏微分方程式

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (0 \leq x \leq 1, t \geq 0) \quad (\kappa > 0 \text{ は定数}) \qquad \text{：熱方程式}$$

境界条件：$y(0,t) = y(1,t) = 0$

について次の問に答えよ．

(1) 初期条件

$$y(x,0) = \sin \pi x + \frac{1}{2}\sin 2\pi x + \frac{1}{3}\sin 3\pi x$$

に対する解を求めよ．

(2) 初期条件

$$y(x,0) = \begin{cases} x & \left(0 \leq x < \frac{1}{2}\right) \\ 1-x & \left(\frac{1}{2} \leq x \leq 1\right) \end{cases}$$

に対する解を求めよ．

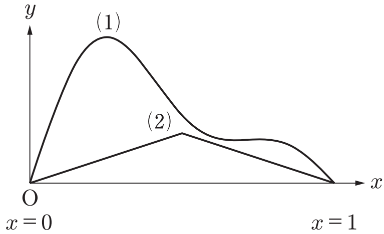

図 2.8　初期条件のグラフ

（**解**）　(1) 変数 x の関数 $X(x)$ と変数 t の関数 $T(t)$ との積 $y(x,t) = X(x)T(t)$ の形の解をまず求める．両辺を変数 x で 2 階微分，ならびに変数 t で 1 階微分すると

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = X''(x)T(t), \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = X(x)T'(t)$$

となる．もとの偏微分方程式へあてはめると

$$X(x)T'(t) = \kappa X''(x)T(t)$$

となる．さらに左辺へ変数 t の関数を，右辺へ変数 x の関数を移項すると

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \kappa \frac{X''(x)}{X(x)} \qquad \text{：変数分離形}$$

と変形される．これは t の関数と x の関数が恒等的に等しいことを意味する．ゆえに左辺と右辺はいずれも文字 t と x を含まない．したがって

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \kappa\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \qquad (\lambda\text{は定数})$$

とおくことができる．

$$\kappa\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda, \qquad \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda$$

より次式が成り立つ．

$$X''(x) = \frac{\lambda}{\kappa}X(x) \tag{2.21}$$

$$T'(t) = \lambda T(t) \tag{2.22}$$

式 (2.21) は変数 x の常微分方程式，式 (2.22) は変数 t の常微分方程式である（ゆえに前章の知識により解くことができる）．また境界条件の方が初期条件よりも扱いやすい形である．よって x に関する方程式 (2.21) を先に解く．

i) $\lambda > 0$ のとき，$X = A\cosh\sqrt{\frac{\lambda}{\kappa}}x + B\sinh\sqrt{\frac{\lambda}{\kappa}}x$ (A，B：定数) である（2 階微分がもとの関数の正数倍となるため）．境界条件をあてはめると $0 = A\cosh 0 + B\sinh 0$ かつ $0 = A\cosh\sqrt{\frac{\lambda}{\kappa}} + B\sinh\sqrt{\frac{\lambda}{\kappa}}$，すなわち $A = 0$ かつ $B = 0$ となる．よって自明な解 $X(x) \equiv 0$ となる．

ii) $\lambda = 0$ のとき，$X''(x) = 0$ より $X = Ax + B(A$，B：定数) である．境界条件をあてはめると $0 = A\cdot 0 + B$ かつ $0 = A\cdot 1 + B$，すなわち $A = 0$ かつ $B = 0$ となる．よって自明な解 $X(x) \equiv 0$ となる．

iii) $\lambda < 0$ のとき，$X = A\cos\sqrt{-\frac{\lambda}{\kappa}}x + B\sin\sqrt{-\frac{\lambda}{\kappa}}x$（$A$，$B$：定数）である（2 階微分がもとの関数の負数倍となるため）．境界条件をあてはめると $0 = A\cos 0 + B\sin 0$ かつ $0 = A\cos\sqrt{-\frac{\lambda}{\kappa}} + B\sin\sqrt{-\frac{\lambda}{\kappa}}$，すなわち $A = 0$ かつ $B\sin\sqrt{-\frac{\lambda}{\kappa}} = 0$ となる．$B = 0$ のとき $X(x) \equiv 0$ となるが，$B \neq 0$ のとき $\sin\sqrt{-\frac{\lambda}{\kappa}} = 0$ である．ゆえに

$$\sqrt{-\frac{\lambda}{\kappa}} = n\pi, \qquad \lambda = -\kappa n^2\pi^2 \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

となり，常微分方程式 (2.21) の解は次のとおりである．

$$X = B\sin n\pi x \qquad (B\text{ は定数})\ (n = 1, 2, \cdots)$$

注意 2.17　奇関数のフーリエ変換を定義どおりに計算するとフーリエ正弦変換の $-i$ 倍，すなわち $F(\omega)=-iS(\omega)$ が導かれる．本書や他書において，奇関数のフーリエ変換の値として $F(\omega)$ ではなく $S(\omega)$ を挙げることが多いので，注意すること．

例題 2.18　次の関数のフーリエ変換を求めよ．

$$f(x)=\begin{cases} 1 & (|x|<1) \\ \dfrac{1}{2} & (x=-1,1) \\ 0 & (|x|>1) \end{cases}$$

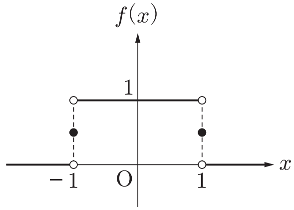

図 2.9　フーリエ変換前

（**解**）　偶関数であるからフーリエ余弦変換を行う．

$$\begin{aligned} C(\omega) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\cos\omega x dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{1}\cos\omega x dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{\sin\omega x}{\omega}\right]_0^1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\omega}{\omega} \end{aligned}$$

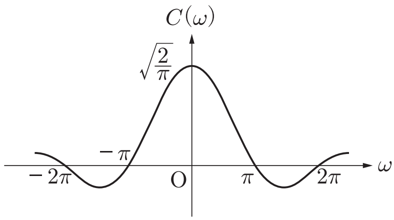

図 2.10　フーリエ変換後

（**別解**）　偶関数，奇関数と限らない場合のフーリエ変換公式を用いる．

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{-i\omega x}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{-i\omega}\left[e^{-i\omega x}\right]_{-1}^{1} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-i\omega}-e^{i\omega}}{i\omega} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{i\omega}-e^{-i\omega}}{2i\omega} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\omega}{\omega} \end{aligned}$$

ここで公式 $\sin\omega=(e^{i\omega}-e^{-i\omega})/2i$ を用いた．　□

注意 2.19　先の例題で求めたフーリエ変換は分母に文字 ω を含む．ゆえに $\omega = 0$ となる場合を本来なら考慮しなければならない．そのためには，まず $\omega \neq 0$ の場合についてフーリエ変換する（解，別解と同じ計算結果となる）．次に $\omega = 0$ の場合についてフーリエ変換したものが，$\omega \neq 0$ に対するフーリエ変換の $\omega \to 0$ での極限に一致することを示せばよい．

以後 $\omega = 0$ の場合についての説明を省略する．

問 8　次の関数のフーリエ変換を求めよ．また $y = f(x)$ のグラフを描き，偶関数，奇関数，どちらでもない関数のいずれかを答えよ．ただし $a > 0$ とする．

(1) $f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| < a) \\ \frac{1}{2} & (x = -a, a) \\ 0 & (|x| > a) \end{cases}$　　(2) $f(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x < 1) \\ -1 & (-1 < x < 0) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

(3) $f(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x < a) \\ -1 & (-a < x < 0) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$　　(4) $f(x) = \begin{cases} x & (0 < x < 1) \\ \frac{1}{2} & (x = 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

2.6　フーリエ変換の性質

フーリエ変換の代表的な性質について述べる．種々のフーリエ変換を容易に求めたり，理工学面での意味付けをしたりするために用いられる．

関数 $f(x)$ のフーリエ変換を $\mathcal{F}[f(x)]$ または $F(\omega)$ と記す．

フーリエ変換の性質

(1) **線形性**

$$\mathcal{F}[af(x) + bg(x)] = aF(\omega) + bG(\omega)$$

(2) **原関数**の平行移動（時間軸の推移）

$$\mathcal{F}[f(x - a)] = e^{-i\omega a}F(\omega)$$

3

第3章 ラプラス変換

波の伝わり方を周波数ごとに解析するための基礎となるラプラス変換について学ぶ．種々の計算公式を身につけることと，ラプラス変換の応用のうち，常微分方程式の初期値問題の解法を目的とする．

3.1 ラプラス変換

ここで学ぶラプラス変換では，次のような関数を考える．

$$f(t) : 0 < t < \infty \text{ で定義された関数}$$

通常，$t < 0$ では $f(t) = 0$ と考える．すると，$t = 0$ に機械のスイッチを入れて，その後の機械の何かの動きを表していると見ることができる．$t = 0$ での値については，最初に学ぶときにはくわしくは触れないでおくほうがよいようである．

s を実数とする．次の積分を**ラプラス積分**という．

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

この積分が収束するとき，この積分結果を $f(t)$ の**ラプラス変換**といい，ここでは $\mathcal{L}\{f(t)\}$ や $F(s)$ で表す．この積分のなかにはパラメータ s が含まれるので，この積分は s の関数である．

ラプラス変換

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \tag{3.1}$$

$F(s)$ を**像関数**，$f(t)$ を**原関数**という．$f(t)$ から $F(s)$ を求めることを，ラプラス変換するという．また，$F(s)$ から $f(t)$ を求めることを，**逆ラプラス変換**（またはラプラス逆変換）するといい，$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ で表す．像関数のことを，簡単にラプラス変換と呼ぶこともある．

(解)

(1) $\mathcal{L}\{\cosh 2t\} = \dfrac{s}{s^2 - 2^2} = \dfrac{s}{s^2 - 4}$ (2) $\mathcal{L}\{\sinh 3t\} = \dfrac{3}{s^2 - 3^2} = \dfrac{3}{s^2 - 9}$

□

問 5 次の関数のラプラス変換を求めよ．

(1) $\cosh\sqrt{2}t$ (2) $\cosh(-\sqrt{2}t)$ (3) $\sinh 4t$ (4) $\sinh(-4t)$

三角関数のラプラス変換は有用であるので，公式として述べる．

公式

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2} \tag{3.12}$$

[説明] $\cos at$ や $\sin at$ のラプラス積分を求めるには，部分積分法を適用すればよい．しかしここでは，0 章で学んだ純虚数の指数関数で三角関数を表す公式を使う．

$$\begin{aligned}
F(s) &= \mathcal{L}\{\cos at\} = \int_0^\infty (\cos at)e^{-st}dt = \int_0^\infty \frac{e^{iat} + e^{-iat}}{2} e^{-st}dt \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty e^{iat}e^{-st}dt + \int_0^\infty e^{-iat}e^{-st}dt\right) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\{e^{iat}\} + \mathcal{L}\{e^{-iat}\}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - ai} + \frac{1}{s + ai}\right) = \frac{1}{2}\frac{s + ai + s - ai}{(s - ai)(s + ai)} = \frac{s}{s^2 + a^2}
\end{aligned}$$

□

公式

$$\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2} \tag{3.13}$$

[説明]

$$\begin{aligned}
F(s) &= \mathcal{L}\{\sin at\} = \int_0^\infty (\sin at)e^{-st}dt = \int_0^\infty \frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i} e^{-st}dt \\
&= \frac{1}{2i}\left(\int_0^\infty e^{iat}e^{-st}dt - \int_0^\infty e^{-iat}e^{-st}dt\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\mathcal{L}\{e^{iat}\} - \mathcal{L}\{e^{-iat}\}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s - ai} - \frac{1}{s + ai}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\frac{s + ai - s + ai}{(s - ai)(s + ai)} = \frac{a}{s^2 + a^2}
\end{aligned}$$

□

例題 3.6 次の関数のラプラス変換を求めよ．

(1) $\cos 2t$　　(2) $\sin\sqrt{2}t$

(解)

(1) $\mathcal{L}\{\cos 2t\} = \dfrac{s}{s^2+2^2} = \dfrac{s}{s^2+4}$

(2) $\mathcal{L}\{\sin\sqrt{2}t\} = \dfrac{\sqrt{2}}{s^2+(\sqrt{2})^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{s^2+4}$ □

問 6 次の関数のラプラス変換を求めよ．

(1) $\cos\sqrt{3}t$　　(2) $\cos(-\sqrt{3}t)$　　(3) $\sin 3t$

(4) $\sin(-3t)$　　(5) $2\sin t\cos t$

デルタ関数のラプラス変換も，理工学への応用上重要である．

公式

$$\mathcal{L}\{b\delta(t-a)\} = be^{-as} \qquad (a, b \text{ は定数}) \tag{3.14}$$

[**説明**]　$\delta(t-a)$ は (ディラックの) **デルタ関数**と呼ばれ，次の性質をもつ（例 2.22, 例 2.23 参照）．

$$\begin{aligned} t<a \text{ のとき} \quad & \delta(t-a)=0 \\ t=a \text{ のとき} \quad & \delta(t-a)=\infty \\ t>a \text{ のとき} \quad & \delta(t-a)=0 \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)dt = 1$$

これらの性質から，まず重要な公式 (3.15) を示す．ここで

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta(t-a)dt$$

とおく．$t=a$ 以外では $\delta(t-a)$ は 0 なので，そこで $g(t)$ がどんな値をとっても，$g(t)\delta(t-a)$ は 0 である．0 の定積分は 0 であるから，$t=a$ 以外で $g(t)$ がどんな値をとっても，積分 I の値は同じである．計算が簡単になるように，$t=a$ 以外の t の

3.4.1 簡単な逆ラプラス変換

a を定数とする．n を正の整数とする．逆ラプラス変換の公式をいくつか挙げる．

逆ラプラス変換の公式

(1) $\mathcal{L}\{a\} = \dfrac{a}{s}$ より

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s}\right\} = a \tag{3.52}$$

(2) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right\} = \dfrac{1}{(n-1)!}\mathcal{L}\{t^{n-1}\} = \dfrac{1}{(n-1)!}\dfrac{(n-1)!}{s^n} = \dfrac{1}{s^n}$ より

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^n}\right\} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)} \tag{3.53}$$

一般には，$n > -1$ をみたす実数 n に対し (3.53) が成り立つ（公式 (3.8) の説明を参照のこと）．

例題 3.19 次の関数の逆ラプラス変換を計算せよ．

(1) $\dfrac{3}{s}$　(2) $\dfrac{1}{s^2}$　(3) $\dfrac{1}{s^4}$

(解) (1)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s}\right\} = 3$$

(2)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = \frac{t^{2-1}}{(2-1)!} = t$$

(3)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\} = \frac{t^{4-1}}{(4-1)!} = \frac{t^3}{3!} = \frac{t^3}{6}$$

□

問 19 次の関数の逆ラプラス変換を計算せよ．

(1) $\dfrac{2}{s}$　(2) 0　(3) $\dfrac{1}{s^3}$　(4) $\dfrac{1}{s^{1/2}}$

指数関数，双曲線関数についての公式を，次に述べる．

逆ラプラス変換の公式

(3)　$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$ より

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at} \tag{3.54}$$

(4)　$\mathcal{L}\{\cosh at\} = \dfrac{s}{s^2-a^2}$ より

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-a^2}\right\} = \cosh at \tag{3.55}$$

(5)　$\mathcal{L}\{\sinh at\} = \dfrac{a}{s^2-a^2}$ より

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s^2-a^2}\right\} = \sinh at \tag{3.56}$$

例題 3.20　次の関数の逆ラプラス変換を求めよ．

(1) $\dfrac{1}{s-2}$　(2) $\dfrac{1}{s+3}$　(3) $\dfrac{s}{s^2-4}$　(4) $\dfrac{1}{s^2-1}$

(**解**)　(1)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = e^{2t}$$

(2)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-(-3)}\right\} = e^{-3t}$$

(3)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-4}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-2^2}\right\} = \cosh 2t$$

(4)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-1}\right\} = \sinh t$$

□

問 20　次の関数の逆ラプラス変換を求めよ．

(1) $\dfrac{1}{s+5}$　(2) $\dfrac{3}{s^2-9}$　(3) $\dfrac{s}{s^2-16}$

4

第4章 複素関数

4.1 複素関数

複素数 z を複素数 w に対応させる関数を $w = f(z)$ のようにかく．ここで，x, y を実数，i を虚数単位として，複素数 z を $z = x + yi$ とおくと，z の関数である w も x, y の関数としてかける．また，w は複素数であるから，実部 $u(x, y)$ と虚部 $v(x, y)$ があるはずであり，次のようにかける．

$$w = f(z) = u(x, y) + v(x, y)i \tag{4.1}$$

例題 4.1 $w = f(z) = z^2$ のとき，その実部 $u(x, y)$ と虚部 $v(x, y)$ を x, y を使って表せ．

（解）

$$z^2 = (x + yi)^2 = x^2 + 2xyi + y^2 i^2 = x^2 + 2xyi - y^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

よって

$$u(x, y) = x^2 - y^2,\ v(x, y) = 2xy$$

□

問 1 $z = x + yi$ (x, y は実数) とする．次の関数 $f(z)$ の，実部 $u(x, y)$ と虚部 $v(x, y)$ を x, y の関数として表せ．

(1) $f(z) = \overline{z}^3 + 2i$　(2) $f(z) = z\overline{z}$　(3) $f(z) = \mathrm{Im}(z) + i\mathrm{Re}(z)$

一変数の実数関数の場合は，xy 平面にその関数のグラフを描くことにより，おおざっぱな性質を直感的に理解できる．複素関数は，複素平面上の 1 点から，別の複素平面上の 1 点への対応を表す．例として，$w = z^2$ の場合にいくつかの複素平面上の

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^2-y^2)=2x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x^2-y^2)=-2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(2xy)=2y,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(2xy)=2x$$

よって

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

となり，コーシー–リーマンの方程式をみたすので，$f(z)=z^2$ は正則関数．

(2)

$$u=x,\quad v=-y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial x}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial x}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial(-y)}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial(-y)}{\partial y}=-1$$

よって

$$\frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

となり，コーシー–リーマンの方程式を両方はみたさないので，$f(z)=\overline{z}$ は正則関数ではない．□

問 3 次の関数 $f(z)$ に対してコーシー–リーマンの方程式が成立するかどうか調べよ．

(1) $f(z)=\overline{z}^3+2i$　(2) $f(z)=z^2+iz$　(3) $f(z)=\mathrm{Im}(z)+i\mathrm{Re}(z)$

4.4 正則関数の組み合わせ

領域 D で正則な，2 つの関数 $f(z)$, $g(z)$ を考えよう．つまり z が領域 D の中にある限り微分ができるとする．つまり $f'(z)$ と $g'(z)$ が存在するとする．導関数の定義式は，形式的に実数の場合と同じであるので，実数と同じ微分の公式が成立する．

微分の公式

$$\frac{d}{dz}(Af(z)+Bg(z))=A\frac{df(z)}{dz}+B\frac{dg(z)}{dz}\quad (A,B\text{ は定数})\qquad(4.11)$$

$$\frac{d}{dz}(f(z)g(z)) = \frac{df(z)}{dz}g(z) + f(z)\frac{dg(z)}{dz} \quad \text{：積の微分} \tag{4.12}$$

$$\frac{d}{dz}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2} \quad \text{：商の微分} \tag{4.13}$$

$$w = f(u), \quad u = g(z) \text{ のとき } \quad \frac{dw}{dz} = \frac{dw}{du}\frac{du}{dz} \quad \text{：合成関数の微分} \tag{4.14}$$

これより，$Af(z) + Bg(z)$, $f(z)g(z)$, $f(z)/g(z)$ や $f(g(z))$ も正則であることが分かる．また，正則関数の場合，実数関数の場合と同じ要領で微分してよいということが分かる．このほかに，逆関数の微分の公式も実数の場合と同じようにして成り立つ．

ただし，$f(z)/g(z)$ には注意が必要である．どんな数字も 0 では割れないので，分母が 0 となるところではこのような分数は意味をもたなくなる．つまり，そこではこの関数もその導関数も存在しない．言い換えると正則ではないのである．

関数 $f(z) =$ 定数は $f'(z) = 0$ をみたす．微分係数が存在するので正則関数である．

次に，z^2 や z^5 の微分については実数関数の場合と同じように次の公式が成立する．

$$\frac{d}{dz}z^m = mz^{m-1} \qquad \text{（ただし } m \text{ は整数，} m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\text{）} \tag{4.15}$$

ただし，分母が 0 になるところを除く．m を整数に限っているのは多価関数にならないようにするためである．

$3i$ も z^4 も正則であるから，この 2 つを掛けた関数 $3iz^4$ も正則関数である．同じ理由で $5z$ も正則関数である．このどちらも正則関数であるから，この 2 つの正則関数を加えたもの $3iz^4 + 5z$ も正則関数である．同様にして $2z^2 - i$ も正則関数である．したがって関数

$$\frac{3iz^4 + 5z}{2z^2 - i}$$

も，分母が 0 になるところを除いて正則関数である．

例題 4.4　次の関数を微分せよ．

(1) $f(z) = \dfrac{z^2 + i}{z - i}$　　　(2) $f(z) = (2z^3 - iz - i)^{10}$

（**解**）

(1) $\dfrac{df(z)}{dz} = \dfrac{(z^2+i)'(z-i) - (z^2+i)(z-i)'}{(z-i)^2} = \dfrac{2z(z-i) - (z^2+i) \times 1}{(z-i)^2}$

$$= \frac{z^2 - 2iz - i}{(z-i)^2}$$

(2) $w = 2z^3 - iz - i$ とおくと，$f(z) = w^{10}$

$$\frac{df(z)}{dw} = 10w^9, \qquad \frac{dw}{dz} = 6z^2 - i,$$

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{df(z)}{dw}\frac{dw}{dz} = 10(2z^3 - iz - i)^9(6z^2 - i) \qquad \square$$

問 4　次の関数 $f(z)$ を微分せよ．

(1) $f(z) = z^{10} + 8iz^6 + i$　　(2) $f(z) = (z^{11} + 2z + i)^{26}$

(3) $f(z) = \dfrac{z+2i}{z^2 + iz + 1}$　　(4) $f(z) = \left(\dfrac{z}{z^2 + i}\right)^3$

4.5　指数関数，三角関数，双曲線関数

指数関数，三角関数や双曲線関数を複素関数に拡張することを考える．対数関数やべき関数などは複素関数に拡張すると多価関数になるので後の節にまわすことにする．

4.5.1　指 数 関 数

まず指数関数を考える．実数の関数

$$y = e^x \tag{4.16}$$

を，単純に複素数に置き換えると

$$w = e^z \tag{4.17}$$

となる．(4.17) で $z = x + yi$（x と y は実数）とおいてやる．そして $e^{x+yi} = e^x e^{iy}$ が成り立つとすると，0 章で学んだオイラーの公式を使って，次のようにかける．

$$\boxed{e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x(\cos y + i\sin y)} \quad ：指数関数の定義 \tag{4.18}$$

(4.18) で複素関数の指数関数を定義する．実部 u と虚部 v は

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y$$

第 4 章　章末問題

［**1**］ $z = x + yi$（ただし x, y は実数）とする．このとき，$\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$, $\cosh z$ の実部 u と虚部 v を x と y で表せ．

［**2**］ 次式が成立することを示せ．

$$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w, \quad \cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$$

［**3**］ 次の関数のすべての極での留数を求めよ．

(1) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+5}$　(2) $f(z) = \dfrac{3z+5}{z^2-4}$　(3) $f(z) = \dfrac{3z-1}{z^2-z-2}$

(4) $f(z) = \left(\dfrac{z+1}{z-2}\right)^2$　(5) $f(z) = \dfrac{z^2+3}{z^3(z^2+1)}$　(6) $f(z) = \dfrac{z^2+2}{z(z-2)^3}$

(7) $f(z) = \dfrac{z^2-4}{z^3+2z^2+2z}$　(8) $f(z) = \dfrac{e^{zt}}{(z-3)^3}$（$t$ は定数）

(9) $f(z) = \dfrac{z}{(z^2+1)^2}$　(10) $f(z) = \dfrac{z^2-3z}{(z+1)^2(z^2+9)}$

(11) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^5}$　(12) $f(z) = \dfrac{\sin 2z}{z^2}$

［**4**］ 次の積分を留数を使って求めよ．

(1) $\displaystyle\int_C \frac{z}{2z-5}dz$　　C：$|z| = 3$ を反時計回りに 1 周

(2) $\displaystyle\int_C \frac{z^2}{(z+2)(z-1)}dz$　　C：$|z+i| = 3$ を反時計回りに 1 周

(3) $\displaystyle\int_C \frac{\cos^2 \pi z}{z-1}dz$　　C：$|z-1| = 1$ を反時計回りに 1 周

(4) $\displaystyle\int_C \frac{\sin iz}{z^2+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}dz$　　C：$|z-\pi i| = 3$ を反時計回りに 1 周

(5) $\displaystyle\int_C \frac{e^z+z}{(z-2)^4}dz$　　C：$|z-i| = 4$ を反時計回りに 1 周

(6) $\displaystyle\int_C \frac{e^{iz}}{(z-1)(z+3i)^2}dz$　　C：$|z+3i| = 1$ を反時計回りに 1 周

(7) $\displaystyle\int_C \frac{e^{iz}}{z^2(z-2\pi)^2}dz$　　C：$|z-i| = \pi$ を反時計回りに 1 周

(8) $\displaystyle\int_C \frac{ze^{zt}}{(z^2+1)^2}dz$　　t は定数，C：$|z| = 2$ を反時計回りに 1 周

［**5**］ 次の実数関数の定積分を留数を使って求めよ．