

計算力をつける

微分積分

神永正博・藤田育嗣

共著

内田老鶴圃

まえがき

本書は、数学を道具として利用する理工系学生向けの微積分学の入門書である。「道具として使う」というところが本書の特徴であり、本書は、数学的な厳密さを多少犠牲にして、概要を理解し、微積分の計算ができるようになることに重点を置いている。そのため、公式や定理には、なぜそのような形をしているかを理解する助けとなるような解説をつけるにとどめてある。また、工業高校などからの入学者を想定し、数学 III を履修していなくても無理なく学習が進められるように最大限配慮した。

本書の第 1 章では、指数関数と対数関数の復習を行う。

第 2 章の前半は、三角関数の復習だが、後半では、高校では扱わない逆三角関数を扱っている。多数の間があるので、必要に応じてチェックしてほしい。

第 3 章では、1 変数の微分法の説明を行い、不定形の極限に対するロピタルの定理、高次導関数の計算、テイラー展開、関数の増減とグラフまでを学習する。

第 4 章では、1 変数の積分法を学び、有理関数、三角関数の有理関数、無理関数の積分法、そしてこれらを図形の計量に応用するところまでを学習する。簡単な広義積分にも触れてある。

第 5 章は 2 変数関数の偏微分の解説である。偏微分の定義から始めて、高次偏導関数とテイラー展開、極値の計算までを学習する。

第 6 章は、2 重積分の解説である。簡単な累次積分、変数変換による 2 重積分の計算、そして、これらの図形の計量への応用までを学習する。

本書では、3 変数以上の微積分は扱わない。しかし、2 変数までをきちんと理解していれば、3 変数以上の微積分を学習することはそれほど難しいことではない。

第 3 章以降の各章には、問だけでなく、章末問題が用意してある。問を例題に従って解いていけば、微積分の基本的なことが掛け算九九のレベルでできるようになる。微積分の掛け算九九をしっかりとやっておけば、ぐんと難しいことに挑戦できるようになる。そうならしたらしめたもの。ぜひ、章末問題にチャレンジしてほしい。章末問題は、問レ

ベルのものよりも「面白い」問題を集めてある。「面白い」問題であるから、問よりは難しいはずである。しかし、問を十分に消化していれば、「自分の頭で」考えられるはずである。すべてに解答がついているから、よく分からなかったら、解答を見てもらいたい。解答を見たうえでもう一度自力で解答を書いてみると、それまで分からなかったことが消化されて自分のものになる。こうしたことを繰り返すことによって、実力がメキメキついてくるはずである。

最後に、このような本を書く機会を与えてくださった内田老鶴圃社長の内田学氏、本書執筆の計画から利用に関して多くの協力をいただいた東北学院大学工学基礎教育センター所長の石橋良信教授はじめ同センター運営委員の皆様感謝したい。

2007年12月

神永正博・藤田育嗣

第2版によせて

第2版に際し、誤植などの修正を行い、誤解されやすい表現を改めた。その際、数学的により厳密な記述にすべきか再検討したが、著者らの工学部における講義の経験から、学生に負担を強いる可能性が高いと判断し、厳密化は見送った。本書は、高校における数学 III と大学の微積分学の内容を融合したものであり、初めて微積分に触れることを前提に書かれている。いわば数学 IV に相当するもので、スタイルも高校数学に近いものとなっている。

本書の活用によって、より多くの学生が数学を「使える」ようになることを期待している。

2009年3月

著者

目 次

まえがき	i
------	---

第 1 章 指数関数と対数関数

1.1 指数関数	1
1.2 対数関数	4

第 2 章 三角関数

2.1 三角比	9
2.2 三角関数	11
2.3 逆三角関数	17

第 3 章 微 分

3.1 関数の極限	21
3.2 導関数	25
3.3 合成関数の微分法	30
3.4 逆関数の微分法	31
3.5 ロピタルの定理	36
3.6 高次導関数	38
3.7 テイラー展開	40
3.8 関数の増減とグラフ	49
章末問題	56

第 4 章 積 分

4.1 積分とは?	59
4.2 不定積分	60
4.3 部分積分法	62
4.4 置換積分法	64
4.5 有理関数の積分	69

4.6	三角関数の有理関数の積分	73
4.7	無理関数の積分	75
4.8	定積分	78
4.9	定積分の応用	86
4.10	広義積分	91
	章末問題	94

第5章 偏微分

5.1	2変数関数	97
5.2	偏導関数	97
5.3	合成関数の微分法	99
5.4	陰関数の導関数	102
5.5	高次偏導関数	105
5.6	テイラー展開	106
5.7	極値	111
	章末問題	115

第6章 2重積分

6.1	2重積分	117
6.2	長方形領域上の積分	118
6.3	縦(横)線形領域上の積分	121
6.4	変数変換	125
6.5	2重積分の応用	132
	章末問題	138

問の略解・章末問題の解答	139
--------------	-----

索引	159
----	-----

2.1 三角比

図 2.1 のように、直角三角形の 1 つの鋭角を θ 、斜辺の長さを r 、その他の 2 辺の長さを x 、 y とするとき、 θ の正弦 (sine)、余弦 (cosine)、正接 (tangent) をそれぞれ

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

で定義する。それらは、角 θ の大きさだけで決まる。

例 2.1

図 2.2 の三角形において、

$$\sin \theta = \frac{3}{5}, \quad \cos \theta = \frac{4}{5}, \quad \tan \theta = \frac{3}{4}$$

である。

□

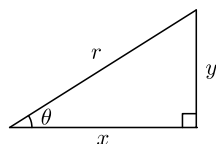


図 2.1

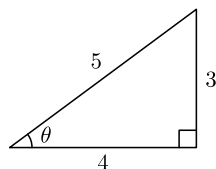
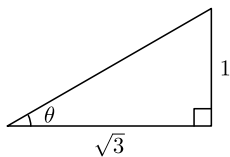


図 2.2

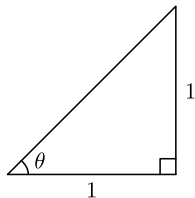
問1

次の直角三角形について $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ を求めよ.

(1)



(2)



問2

$\theta = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ のとき, $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値をそれぞれ求めよ.

定義から

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad (2.1)$$

であることがすぐに分かり, また, 三平方の定理 $x^2 + y^2 = r^2$ から

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad (2.2)$$

も分かる ($(\sin \theta)^2$ を $\sin^2 \theta$ とかく).

問3

$\theta = 30^\circ$ のとき, 公式 (2.1), (2.2) を確かめよ.

2.2 三角関数

2.2.1 弧度法

以後、角度の単位を改めて、

$$180^\circ = \pi \text{ (ラジアン)}$$

と表す. すると、半径 1 の扇形の弧の長さと同じ中心角は等しくなる. このような角の表し方を**弧度法**と呼ぶ (単位ラジアンはしばしば省略される).

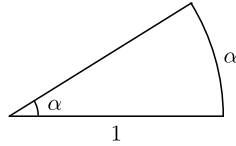
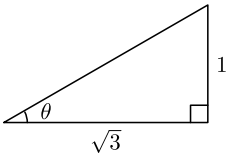


図 2.3

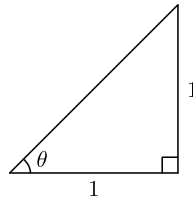
例 2.2

(1)



のとき、 $\theta = \frac{\pi}{6}$ ($= 30^\circ$).

(2)



のとき、 $\theta = \frac{\pi}{4}$ ($= 45^\circ$).

□

問 4

次の角度をラジアンで表せ.

- (1) 30° (2) 45° (3) 60° (4) 90° (5) 270° (6) 360°

2.2.2 三角関数

図 2.4 のように、 x - y 平面上の半径 r の円を考える。円周上の点 P の座標を (x, y) 、 OP と x 軸の正の向きとのなす角を $\theta (\geq 0)$ とするとき、三角比と同様に、 θ の正弦、余弦、正接をそれぞれ

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

と定義する (ただし、 $\tan \theta$ は、 $x = 0$ すなわち $\theta = \pi/2, 3\pi/2, \dots$ では定義されない)。これらは角 θ だけで決まる。 $\theta < 0$ のときは、 OP を x 軸の正の部分から時計回りに動かしたときの角度と考える (図 2.5 参照)。

例 2.3

$$\sin \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \left(= -\sin \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \left(= \cos \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\tan \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \left(= -\tan \frac{\pi}{3}\right).$$

□

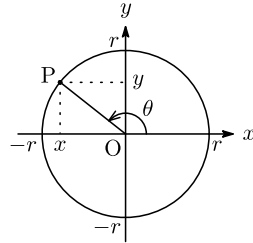


図 2.4

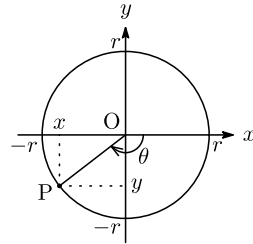


図 2.5

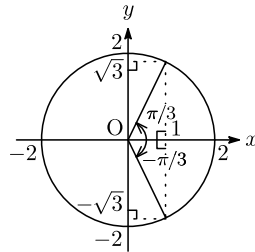


図 2.6

上の例と図 2.4~2.6 から分かるように、

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta, \quad \cos(-\theta) = \cos \theta, \quad \tan(-\theta) = -\tan \theta$$

が成り立つ。また、 θ を $\theta + 2\pi$ や $\theta - 2\pi$ としても P の座標は変わらないので、

$$\begin{aligned} \sin(\theta + 2n\pi) &= \sin \theta, & \cos(\theta + 2n\pi) &= \cos \theta, \\ \tan(\theta + 2n\pi) &= \tan \theta & (n: \text{整数}) \end{aligned}$$

が成り立つことも分かる.

図 2.7 のように, 原点 O を中心とする半径 1 の円 (単位円という) の周上に点 P をとると, その座標 (x, y) は

$$x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta$$

となる. したがって,

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1, \quad -1 \leq \cos \theta \leq 1$$

である. また, 直線 OP と直線 $x = 1$ の交点を $T(1, t)$ とすると,

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = t$$

となる. P が単位円周上を動くとき, 点 $T(1, t)$ は直線 $x = 1$ 上のすべての点を動くので, $(t =) \tan \theta$ はすべての実数値をとることに注意しよう. したがって,

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

が分かる. これらの公式から次の公式が導かれる.

公式

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

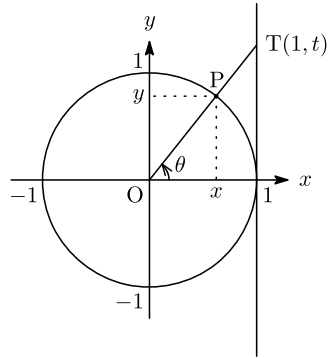


図 2.7

問5

上の公式が成り立つことを示せ.

2.2.3 三角関数のグラフ

すでに見たように,

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad (2.3)$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \quad (2.4)$$

が成り立ち, また,

$$\sin(x + \pi) = -\sin x,$$

$$\cos(x + \pi) = -\cos x$$

であるから,

$$\tan(x + \pi) = \tan x \quad (2.5)$$

が成り立つ. 一般に, 関数 $y = f(x)$ がある数 a に対し常に

$$f(x + a) = f(x)$$

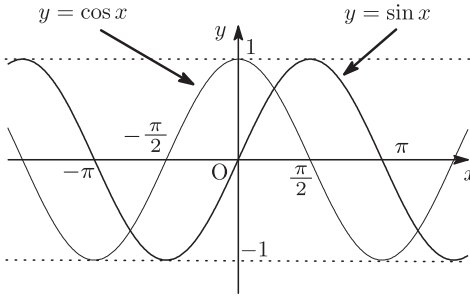
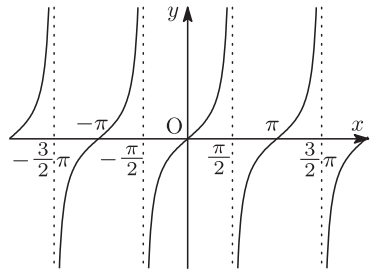
をみたすとき, $y = f(x)$ は**周期 a の周期関数**であるという. (2.3), (2.4), (2.5) から,

$$y = \sin x, y = \cos x \text{ は周期 } 2\pi, y = \tan x \text{ は周期 } \pi \text{ の周期関数}$$

であることが分かる. このことと, 図 2.7 で

$$x = \cos \theta, y = \sin \theta, t = \tan \theta$$

であることに注意すれば, 三角関数のグラフは次のようになることが分かる.

図 2.8 $y = \sin x, y = \cos x$ 図 2.9 $y = \tan x$

問 6

次の周期関数の周期を求めよ。

(1) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

(2) $y = \tan(2x)$

(3) $y = \cos^2 x$

2.2.4 加法定理

ここでは三角関数の加法定理と、それから得られるいくつかの公式を紹介しよう。

加法定理

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \quad (\text{すべて複号同順})$$

問 7

$\sin \frac{7}{12}\pi, \cos \frac{7}{12}\pi, \tan \frac{7}{12}\pi$ の値をそれぞれ求めよ。

(ヒント: $\frac{7}{12}\pi = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ である)

加法定理において $\beta = \alpha$ とすると、次が得られる。

2倍角の公式

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

2倍角の公式の2番目の式 $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ から、

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

α を $\alpha/2$ で置き換えれば、次が得られる。

半角の公式

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}, \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

また、加法定理から次の公式も導かれる。

和と積の公式

$$(1) \sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$(2) \sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$(3) \cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$(4) \cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

問8

和と積の公式を示せ。

問9

和と積の公式で

$$\alpha = \frac{A+B}{2}, \quad \beta = \frac{A-B}{2}$$

とおくことにより、次を示せ。

$$(1) \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}$$

$$(2) \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \}$$

$$(3) \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \}$$

$$(4) \sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \}$$

問 10

和と積の公式と問 9 を使って、次の問に答えよ。

(1) $\sin(x+a) - \sin x$ を三角関数の積で表せ。

(2) $\sin(x+a) \cos(x-a)$ を三角関数の和で表せ。

問 11 3倍角の公式

次を示せ。

$$(1) \sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

$$(2) \cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

2.3 逆三角関数

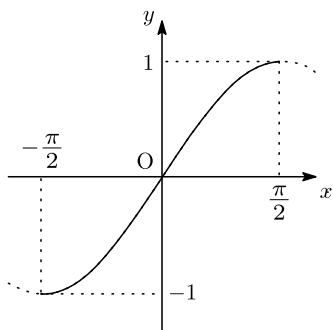
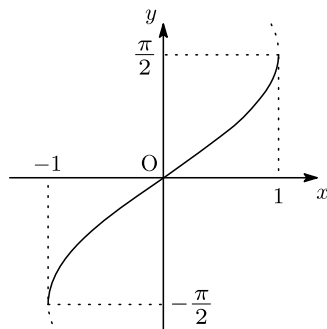
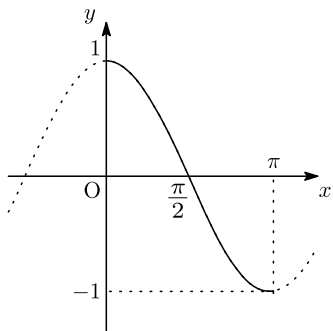
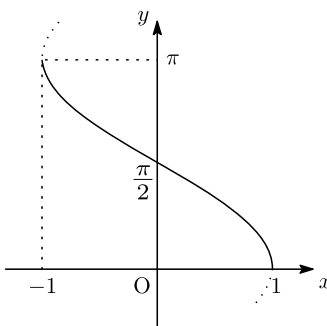
指数関数 $y = a^x$ の逆関数は対数関数 $y = \log_a x$ であった。三角関数の逆関数も考えることができるが、指数関数のように 1 対 1 の関数ではないので注意が必要である*1。 $y = \sin x$ を例にとつて考えよう。

図 2.10 のように、 $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ に限れば、 $y = \sin x$ は 1 対 1 の関数である。したがって、この範囲では逆関数が存在する。これを $y = \sin^{-1} x$ (アークサインとよむ) とかく*2 (図 2.11)。

同様に、 $y = \cos x$ ($0 \leq x \leq \pi$)、 $y = \tan x$ ($-\pi/2 < x < \pi/2$) も逆関数をもつ。これらをそれぞれ $y = \cos^{-1} x$ 、 $y = \tan^{-1} x$ (アークコサイン、アークタンジェント

*1 例えば、 $y = \sin x$ について、 $y = 0$ となる x は $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$ (無限に存在!) なので、1 対 1 ではない。

*2 $y = \arcsin x$ とかく。

図 2.10 $y = \sin x$ 図 2.11 $y = \sin^{-1} x$ 図 2.12 $y = \cos x$ 図 2.13 $y = \cos^{-1} x$

とよむ) とかく*³ (図 2.12, 2.13, 2.14, 2.15 参照).

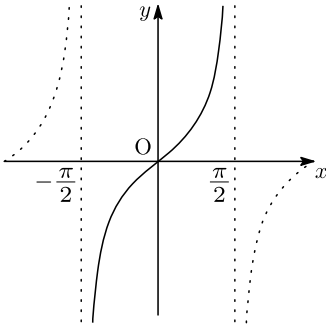
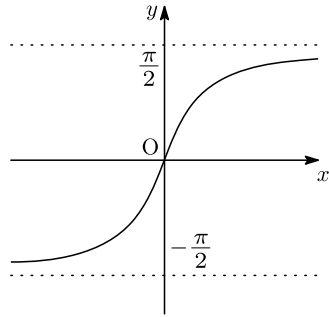
注意 2.4

$\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ は $\frac{1}{\sin x}$, $\frac{1}{\cos x}$, $\frac{1}{\tan x}$ とは全く別の関数であることに注意しよう!! □

例 2.5

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ より } \sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3},$$

*³ $y = \arccos x$, $y = \arctan x$ ともかく.

図 2.14 $y = \tan x$ 図 2.15 $y = \tan^{-1} x$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad \text{よ} \text{り} \quad \cos^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3},$$

$$\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \quad \text{よ} \text{り} \quad \tan^{-1} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

である。

□

問 12

次の値を求めよ。

- | | | |
|------------------------------|------------------------------|-------------------------------------|
| (1) $\sin^{-1} 0$ | (2) $\cos^{-1} 0$ | (3) $\tan^{-1} 0$ |
| (4) $\sin^{-1} 1$ | (5) $\cos^{-1} 1$ | (6) $\tan^{-1} 1$ |
| (7) $\sin^{-1}(-1)$ | (8) $\cos^{-1}(-1)$ | (9) $\tan^{-1}(-1)$ |
| (10) $\sin^{-1} \frac{1}{2}$ | (11) $\cos^{-1} \frac{1}{2}$ | (12) $\tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}}$ |

より

$$f'(0) = i, f''(0) = -1, f'''(0) = -i, f^{(4)}(0) = 1, f^{(5)}(0) = i, \dots$$

なので, $f(\theta) = e^{i\theta}$ のマクローリン展開は,

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\theta + \frac{f''(0)}{2!}\theta^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\theta^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}\theta^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}\theta^5 + \dots \\ &= 1 + i\theta - \frac{1}{2!}\theta^2 - \frac{i}{3!}\theta^3 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \frac{i}{5!}\theta^5 - \dots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \dots\right) \\ &\quad + i\left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \dots\right). \end{aligned}$$

公式 (2), (3) と比較すると, **オイラーの公式**

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

が成り立つことが分かる*7. □

問 17

オイラーの公式を使って, $\cos \theta$, $\sin \theta$ を $e^{i\theta}$ と $e^{-i\theta}$ でそれぞれ表せ.

例題 3.18

- (1) マクローリン展開を使って, 関数 $f(x) = e^x \sin x$ を 5 次式で近似せよ.
 (2) (1) を利用して, $e \sin 1$ の近似値を求めよ.

(解) (1)
$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^x)' \sin x + e^x (\sin x)' \\ &= e^x \sin x + e^x \cos x = e^x (\sin x + \cos x), \end{aligned}$$

*7 一般に, 複素数 $z = x + iy$ (x, y は実数) に対し, e^z を

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$$

で定義する.

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= (e^x)'(\sin x + \cos x) + e^x(\sin x + \cos x)' \\
 &= e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) = 2e^x \cos x, \\
 f'''(x) &= 2\{(e^x)' \cos x + e^x(\cos x)'\} \\
 &= 2(e^x \cos x - e^x \sin x) = 2e^x(\cos x - \sin x), \\
 f^{(4)}(x) &= 2\{(e^x)'(\cos x - \sin x) + e^x(\cos x - \sin x)'\} \\
 &= 2\{e^x(\cos x - \sin x) + e^x(-\sin x - \cos x)\} \\
 &= -4e^x \sin x, \\
 f^{(5)}(x) &= -4(e^x \sin x)' = -4f'(x) = -4e^x(\sin x + \cos x)
 \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}
 f(0) &= e^0 \sin 0 = 0, \\
 f'(0) &= e^0(\sin 0 + \cos 0) = 1, \\
 f''(0) &= 2e^0 \cos 0 = 2, \\
 f'''(0) &= 2e^0(\cos 0 - \sin 0) = 2, \\
 f^{(4)}(0) &= -4e^0 \sin 0 = 0, \\
 f^{(5)}(0) &= -4e^0(\sin 0 + \cos 0) = -4.
 \end{aligned}$$

よって、マクローリン展開を使って $f(x)$ を 5 次式で近似すると、

$$\begin{aligned}
 f(x) &\doteq f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 \\
 &= 0 + x + \frac{2}{2}x^2 + \frac{2}{3 \cdot 2}x^3 + 0x^4 + \frac{-4}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}x^5 \\
 &= x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5.
 \end{aligned}$$

(2) $e \sin 1 = f(1)$ なので、(1) の $f(x)$ の近似式に $x = 1$ を代入すると、

$$e \sin 1 = f(1) \doteq 1 + 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{30} = \frac{60 + 10 - 1}{30} = 2.3. \quad \square$$

問 18

マクローリン展開を使って、 $f(x) = e^x \cos x$ を 5 次式で近似することにより、 $e \cos 1$ の近似値を求めよ (小数第 4 位を四捨五入して、小数第 3 位まで求めよ)。

3.8 関数の増減とグラフ

ここでは関数のグラフの概形を描くことを目標としよう。

まず、極大や極小とは、図 3.3 のようなものである。つまり、

$f(x)$ が $x = c$ で **極大** (あるいは **極小**)
 $\xleftrightarrow{\text{定義}}$
 c の十分近くのすべての $x (\neq c)$ に対し、
 $f(c) > f(x)$ (あるいは $f(c) < f(x)$)

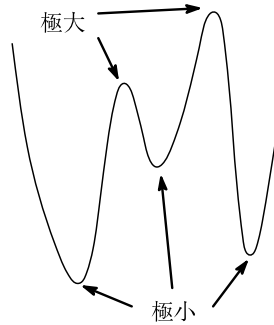


図 3.3

極大 (あるいは極小) のときの $f(x)$ の値を **極大値** (あるいは **極小値**) といい、合わせて **極値** という。

微分の言葉で言い直すと (図 3.4 参照)、

$f(x)$ が $x = c$ で極値をとる
 \iff
 $x = c$ を境に $f'(x)$ の正負が変わる

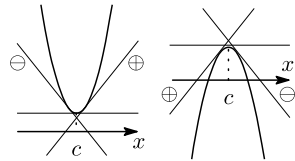


図 3.4

したがって特に、

$$f(x) \text{ が } x = c \text{ で極値をとる} \implies f'(c) = 0$$

である。

第3章 章末問題

[1] $f(x) = x^\alpha e^{-\beta x}$ ($\alpha > 0, \beta > 0, x \geq 0$) の増減を調べ、最大値を求めよ。また、これを利用して $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha e^{-x} = 0$ であることを示せ。

[2] 関数 $f(x)$ を以下のように定める。

$$f(x) = \tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

(1) $f'(x)$ を求めよ。

(2)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & (x > 0) \\ -\frac{\pi}{2} & (x < 0) \end{cases}$$

であることを示せ。

[3] (1) $x e^{-x^2/2}$ のマクローリン展開を求めよ。

(2) $\frac{1}{2} \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$ ($|x| < 1$) のマクローリン展開を求め、 x の値をうまくとることにより、 $\log 2, \log 5$ の近似値を求めよ。

[4] 1年間の金利が r (%) であるような預金を考える。 $\log(1+x)$ のマクローリン展開を利用して、 r があまり大きくないとき、元金が2倍になるには、およそ $70/r$ 年かかることを示せ。これを、「70の法則」という。

[5] (発展) n が自然数であるとき、 $(1+x)^n$ をマクローリン展開せよ。これを用いて、二項定理

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^n \frac{n!}{r!(n-r)!} a^{n-r} b^r$$

を導け。

[6] (発展) $f(x) = \tan^{-1} x$ について以下の間に答えよ*⁹.

(1) $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$ ($n \geq 1$) となるように, $P_n(x)$ を定めるとき,

$P_1(x), P_2(x)$ を求めよ.

(2) $P_{n+1}(x) = (1+x^2)P'_n(x) - 2nxP_n(x)$ が成り立つことを示せ.

(3) (2) を利用して, $f(x)$ のマクローリン展開を5次の項まで求めよ.

[7] (発展) $f(x) = e^x \sin x$ のマクローリン展開を以下の手順で求めよ.

(1) オイラーの公式を用いて, $f(x) = \frac{e^{(1+i)x} - e^{(1-i)x}}{2i}$ を示せ.

(2) (1) を利用して, $f^{(n)}(x)$ を求めよ.

(3) (2) を利用して $f(x)$ のマクローリン展開を求めよ.

*⁹ $\tan^{-1} x$ のマクローリン展開については, 第4章 章末問題 [6] (1) も参照せよ.

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x^2) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 \quad \leftarrow \left((1-x^2)^{\frac{3}{2}} \right)' = -3x\sqrt{1-x^2} \\
 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

□

問3

次の2重積分を計算せよ。

$$\begin{aligned}
 (1) \quad I &= \iint_D xy \, dx dy, \quad D: \begin{cases} 2x + y \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \\
 (2) \quad I &= \iint_D y \, dx dy, \quad D: \begin{cases} x^2 - y \leq 0 \\ -x + y \leq 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

6.4 変数変換 x, y が u, v の関数として

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v), \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$$

と表されているとし、また、これによりちょうど

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xleftrightarrow{1:1} & D \\
 (u-v \text{ 平面の領域}) & & (x-y \text{ 平面の領域})
 \end{array}$$

となっているとする。このとき、2重積分

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy$$

を u, v で表すことができる。

2重積分の変数変換

$$E \xrightarrow{1:1} D$$

$$(u, v) \mapsto (\varphi(u, v), \psi(u, v))$$

ならば,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |J| du dv$$

が成り立つ。ただし,

$$J = \det \begin{pmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{行列} \begin{pmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{pmatrix} \text{の行列式}$$

であり, $|J|$ は J の絶対値である。

[解説]

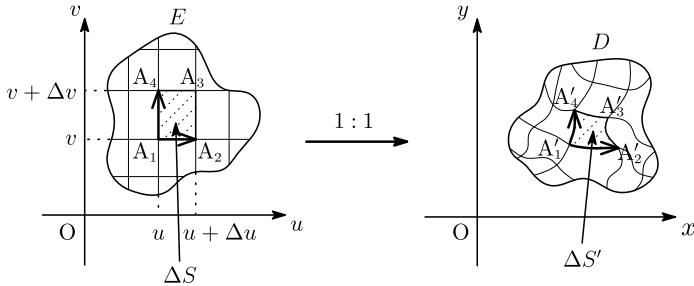


図 6.12

領域 E を小長方形に分割し, 図 6.12 のように一つの長方形の頂点 A_1, A_2, A_3, A_4 をとり, それらに対応する D 上の点を A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 とおく. 分割が細かければ, A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 で囲まれた図形は, ベクトル $\vec{A'_1A'_2}$ と $\vec{A'_1A'_4}$ とで作られる平方四辺形に近い (図 6.13 参照).

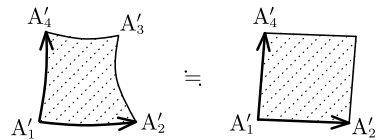


図 6.13

ここで,

$$A'_1 = (\varphi(u, v), \psi(u, v)), \quad A'_2 = (\varphi(u + \Delta u, v), \psi(u + \Delta u, v))$$

より,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A'_1 A'_2} &= (\varphi(u + \Delta u, v) - \varphi(u, v), \psi(u + \Delta u, v) - \psi(u, v)) \\ &\doteq (\varphi_u \cdot \Delta u, \psi_u \cdot \Delta u) \end{aligned}$$

が分かり*2, 同様に,

$$\overrightarrow{A'_1 A'_4} \doteq (\varphi_v \cdot \Delta v, \psi_v \cdot \Delta v)$$

が分かるので,

$$\begin{aligned} \Delta S' &\doteq \left| \det \begin{pmatrix} \varphi_u \cdot \Delta u & \varphi_v \cdot \Delta v \\ \psi_u \cdot \Delta u & \psi_v \cdot \Delta v \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \det \begin{pmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{pmatrix} \right| \Delta u \Delta v \\ &= |J| \Delta S \end{aligned}$$

← 参考 6.3 参照

が成り立つ。よって,

$$\sum_D f(x, y) \Delta S' \doteq \sum_E f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |J| \Delta S \quad *3.$$

ここで $\Delta u, \Delta v \rightarrow 0$ とすれば $\Delta S', \Delta S \rightarrow 0$ となるので, 2重積分の定義より

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |J| du dv$$

が分かる。 □

*2 偏微分の定義

$$\frac{\varphi(u + \Delta u, v) - \varphi(u, v)}{\Delta u} \rightarrow \varphi_u \quad (\Delta u \rightarrow 0)$$

(ψ についても同様) から分かる。

*3 \sum_E は小長方形が E 全体を動くときの和, \sum_D はそれに対応する D の和を表す。

参考 6.3

二つのベクトル $\vec{\alpha} = (a, c)$, $\vec{\beta} = (b, d)$ の作る平行四辺形の面積 S は,

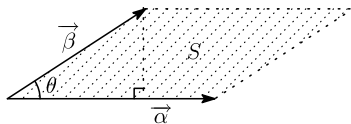
$$S = \left| \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right| (= |ad - bc|)$$

で与えられる. □

問 4

参考 6.3 を証明せよ.

(ヒント: $S = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \sin \theta$ を使う)

**例題 6.4**

2重積分

$$I = \iint_D (x+y)^2 (x-y)^5 dx dy, \quad D: \begin{cases} 0 \leq x+y \leq 1 \\ 0 \leq x-y \leq 1 \end{cases}$$

を $u = x+y$, $v = x-y$ と変換することにより計算せよ.

(解) $u = x+y$, $v = x-y$ なので, $E \xrightarrow{1:1} D$ となる (u - v 平面の) 領域 E は

$$E: \begin{cases} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1 \end{cases}$$

とかける. また, x, y について解くと

$$x = \frac{u+v}{2} (= \varphi(u, v)), \quad y = \frac{u-v}{2} (= \psi(u, v))$$

なので, ヤコビアンは

$$\begin{aligned}
 J &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
 &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

よって,

$$dxdy = \left| -\frac{1}{2} \right| dudv = \frac{1}{2} dudv.$$

ゆえに,

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_E u^2 v^5 \cdot \frac{1}{2} dudv \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \int_0^1 u^2 v^5 dv \right\} du = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{1}{6} u^2 v^6 \right]_{v=0}^{v=1} du \\
 &= \frac{1}{12} \int_0^1 u^2 du = \frac{1}{12} \left[\frac{1}{3} u^3 \right]_0^1 = \frac{1}{36}. \quad \square
 \end{aligned}$$

問 5

2 重積分

$$I = \iint_D e^{x-y} \sin(x+y) dx dy, \quad D : \begin{cases} 0 \leq x+y \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq x-y \leq 1 \end{cases}$$

を $u = x+y$, $v = x-y$ と変数変換することにより計算せよ。

6.4.1 極座標変換

特に重要な変数変換は、次の極座標変換である。

図 6.14 のように x - y 平面上の点を原点 O からの距離 r と x 軸の正の向きからの角度 θ を使って表す表示を**極座標表示**という。極座標表示により、 x - y 平面上のすべての点 (x, y) は、

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

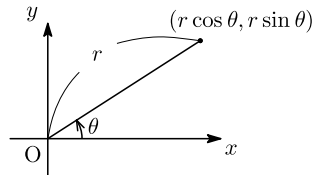


図 6.14

$$r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (\text{または } -\pi \leq \theta \leq \pi)$$

と表すことができる. このような変数変換を**極座標変換**と呼ぶ. 極座標変換により

$$\begin{aligned} |J| &= \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \right| \\ &= |r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)| = |r| = r \end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned} E &\xrightarrow{1:1} D \\ (r, \theta) &\longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \end{aligned}$$

なる E をとれば, 変数変換の公式から次を得る.

2重積分の極座標変換

極座標変換により $E \xrightarrow{1:1} D$ のとき,

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_E f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr d\theta$$

が成り立つ.

例題 6.5

極座標変換により, 2重積分

$$I = \iint_D (x^2 + y^2) \, dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq 1$$

を計算せよ.

(解) $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ ($r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$) により,

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta \\ &= r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^2\end{aligned}$$

となるので,

$$x^2 + y^2 \leq 1 \iff r^2 \leq 1 \iff -1 \leq r \leq 1.$$

$r \geq 0$ なので, $0 \leq r \leq 1$. θ については制限がないので, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. よって, $D \xrightarrow{1:1} E$ となる (r - θ 平面の) 領域 E は

$$E: \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

とかける. また, 極座標変換のヤコビアンは r (≥ 0) なので,

$$dxdy = r drd\theta.$$

ゆえに,

$$\begin{aligned}I &= \iint_E r^2 \cdot r drd\theta \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{2\pi} r^3 d\theta \right\} dr = \int_0^1 r^3 [\theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr \\ &= \int_0^1 2\pi r^3 dr = 2\pi \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

□

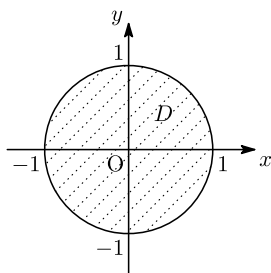


図 6.15

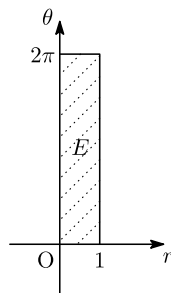


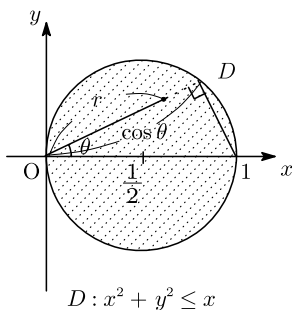
図 6.16

問 6

極座標変換により, 次の 2 重積分を計算せよ.

$$(1) I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dxdy, \quad D: x^2 + y^2 \leq 2.$$

$$(2) I = \iint_D \frac{x}{x^2 + y^2} dxdy, \quad D: x^2 + y^2 \leq x.$$



6.5 2重積分の応用

6.5.1 体積

曲面 $z = f(x, y)$, $z = g(x, y)$ が常に

$$f(x, y) \geq g(x, y)$$

をみたすとき、領域 D 上それらの曲面の間の部分の体積 V は

$$V = \iint_D \{f(x, y) - g(x, y)\} dx dy$$

で与えられる。

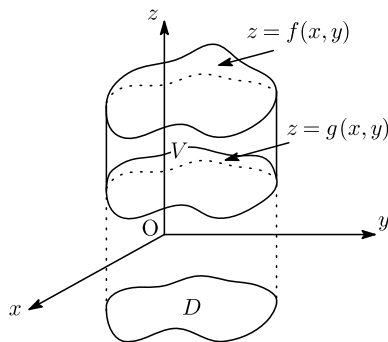


図 6.17

例題 6.6

$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ と $z \geq 1$ の交わり部分の体積 V を求めよ。

(解) V は球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ と平面 $z = 1$ とで囲まれた部分の体積で、それは $x^2 + y^2 + 1 \leq 4$, つまり、円板

$$D: x^2 + y^2 \leq 3$$

の上にある。

問 15 (1) $x^2 e^x = x^2 + \frac{1}{1!}x^3 + \frac{1}{2!}x^4 + \cdots + \frac{1}{n!}x^{n+2} + \cdots$

(2) $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \cdots$

(3) $f(x) = e^x$ とおくと $f(ax) = e^{ax}$ なので、公式 (1) の x を ax で置き換えて、
 $e^{ax} = 1 + \frac{1}{1!}ax + \frac{1}{2!}(ax)^2 + \frac{1}{3!}(ax)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}(ax)^n + \cdots$

(4) $\sin ax = ax - \frac{1}{3!}(ax)^3 + \frac{1}{5!}(ax)^5 - \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(ax)^{2k+1} + \cdots$

問 16 (1) $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^n$ であることから分かる.

(2) $g(x) = f(x^2)$ なので、(1) の式の x を x^2 で置き換えればよい.

問 17 $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$, $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

問 18 1.467

問 19 (y' , y'' のみ記す)

(1) $y' = 3x^2 - 1 = 3\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $y'' = 6x$

(2) $y' = \frac{2x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $y'' = \frac{x(2x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$

(3) $y' = -2xe^{-x^2}$, $y'' = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2} = 4\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-x^2}$

(4) $y' = -(x-1)e^{-x}$, $y'' = (x-2)e^{-x}$

(5) $y' = -(2x^2 - 1)e^{-x^2} = -2\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-x^2}$,
 $y'' = 2x(2x^2 - 3)e^{-x^2} = 4x\left(x + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)e^{-x^2}$

(6) (真数条件より) $x > 0$ に注意

$$y' = -\frac{\log x - 1}{x^2} = -\frac{\log\left(\frac{x}{e}\right)}{x^2} \quad (y' = 0 \iff x = e),$$

$$y'' = \frac{2\log x - 3}{x^3} = \frac{\log\left(\frac{x^2}{e^3}\right)}{x^3} \quad (y'' = 0 \iff x = e^{\frac{3}{2}})$$

第3章 章末問題

[1] $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x} - \beta x^\alpha e^{-\beta x} = x^{\alpha-1}(\alpha - \beta x)e^{-\beta x}$ となるが、 $\alpha > 0$, $\beta > 0$ であるので、 $x = \alpha/\beta$ で、最大値 $f(\alpha/\beta) = (\alpha/\beta)^\alpha e^{-\alpha}$ をとる。 $0 < \beta < 1$ となるように β を選べば、

$$x^\alpha e^{-x} = x^\alpha e^{-\beta x} e^{-(1-\beta)x} \leq (\alpha/\beta)^\alpha e^{-\alpha} e^{-(1-\beta)x} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty)$$

[2] (1) の解答は以下のとおり.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0 \end{aligned}$$

(2) $f'(x) = 0$ ($x \neq 0$) であるから, $f(x)$ は, $x > 0$, $x < 0$ において定数である. したがって, $x > 0$ においては, $f(x) = f(1) = \tan^{-1} 1 + \tan^{-1} 1 = \pi/4 + \pi/4 = \pi/2$, 同様に, $x < 0$ においては, $f(x) = f(-1) = -\pi/2$ となる.

[3] (1) e^x のマクローリン展開に, $-x^2/2$ を代入して x を掛けることにより, 以下の展開式が得られる.

$$\begin{aligned} xe^{-x^2/2} &= x \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!} \left(-\frac{x^2}{2} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(-\frac{x^2}{2} \right)^3 + \dots \right) \\ &= x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{2!2^2} - \frac{x^7}{3!2^3} + \dots \end{aligned}$$

※ $e^{-x^2/2}$ の展開式を微分することによっても同様の結果が得られる.

(2) $\log \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = \log(1+x) - \log(1-x)$ とかけるから, $\log(1+x)$ のマクローリン展開の式を利用して, 次の展開式を得る.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right) &= \frac{1}{2} \{ \log(1+x) - \log(1-x) \} \\ &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(-x - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3} - \frac{(-x)^4}{4} + \dots \right) \\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \end{aligned}$$

$x = 1/3$ とすると,

$$\frac{1}{2} \log \left(\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} \right) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{4}{2} \right) = \frac{1}{2} \log 2$$

となるから,

$$\log 2 = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \dots \right) \sim 0.69314 \dots$$

同様に, $x = 1/9$ とおくことにより, $\log 5 \sim 1.6094 \dots$ を得る.

[4] 金利が r (%) である預金は, n 年で, $(1+r/100)^n$ 倍になる. これが 2 になるような n を求めればよいから, $(1+r/100)^n = 2$ の両辺の自然対数をとって,

$$\begin{aligned} n &= \frac{\log 2}{\log(1+r/100)} \\ &= \frac{\log 2}{r/100 - \frac{1}{2}(r/100)^2 + \frac{1}{3}(r/100)^3 - \dots} \\ &\sim \frac{100 \log 2}{r} \end{aligned}$$

となる. $\log 2 \sim 0.693 \dots$ であるから, $100 \log 2 \sim 70$ であり, したがって, $n \sim 70/r$ となる.

[5] $f(x) = (1+x)^n$ に対しては, $f^{(r)}(x) = n(n-1)\dots(n-r+1)(1+x)^{n-r}$ ($r = 0, 1, 2, 3, \dots, n$), $f^{(r)}(x) = 0$ ($r > n$) であるから, $f^{(r)}(0) = n(n-1)\dots(n-r+1) = n!/(n-r)!$ となる. よって, $(1+x)^n$ のマクローリン展開は,

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^n \frac{n!}{r!(n-r)!} x^r$$

となる. これを利用して, 以下のように, $(a+b)^n$ の展開式が得られる.

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= a^n (1+(b/a))^n \\ &= a^n \sum_{r=0}^n \frac{n!}{r!(n-r)!} \left(\frac{b}{a}\right)^r \\ &= \sum_{r=0}^n \frac{n!}{r!(n-r)!} a^{n-r} b^r \end{aligned}$$

ここで, $a = 0$ の場合は, 明らかなので, $a \neq 0$ であると仮定した.

[6] (1)

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

であるから, $P_1(x) = 1, P_2(x) = -2x$ となる.

(2) $f^{(n)}(x) = P_n(x)/(1+x^2)^n$ の両辺を微分すると,

$$\frac{P_{n+1}(x)}{(1+x^2)^{n+1}} = f^{(n+1)}(x) = \frac{P_n'(x)(1+x^2)^n - 2nxP_n(x)(1+x^2)^{n-1}}{(1+x^2)^{2n}}$$

となる. 分母をはらうと, $P_{n+1}(x) = (1+x^2)P_n'(x) - 2nxP_n(x)$ が得られる.

(3) $P_1(0) = 1, P_2(0) = 0$ はすぐに分かる. (2) を利用して, $P_3(x), P_4(x), P_5(x)$ を求めると, $P_3(x) = (1+x^2)(-2x)' - 2 \cdot 2x(-2x) = 6x^2 - 2, P_4(x) = (1+x^2)(6x^2 - 2)' - 2 \cdot 3x(6x^2 - 2) = -24x^3 + 24x, P_5(x) = (1+x^2)(-24x^3 + 24x)' - 2 \cdot 4x(-24x^3 + 24x) = 120x^4 - 240x^2 + 24$ となる. これらに $x = 0$ を代入すると, $P_3(0) = -2, P_4(0) = 0, P_5(0) = 24$ となるから, 求めるマクローリン展開の 5 次までの項は, 以下のようになる.

$$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$$

[7] (1) オイラーの公式から, $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ となるので, この両辺に e^x をかけて, $e^x \sin x = \frac{e^{(1+i)x} - e^{(1-i)x}}{2i}$ を得る.

(2) e^{ax} の n 次導関数は, $a^n e^{ax}$ となるから,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \frac{(1+i)^n e^{(1+i)x} - (1-i)^n e^{(1-i)x}}{2i} \\ &= \frac{e^x \{(1+i)^n e^{ix} - (1-i)^n e^{-ix}\}}{2i} \end{aligned} \quad (*)$$

となる. ここで, $1+i = \sqrt{2}e^{\pi i/4}$, $1-i = \sqrt{2}e^{-\pi i/4}$ であるから, $(1+i)^n = (\sqrt{2})^n e^{n\pi i/4}$, $(1-i)^n = (\sqrt{2})^n e^{-n\pi i/4}$ となる. これらを (*) に代入すると,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \frac{e^x \{(\sqrt{2})^n e^{n\pi i/4} e^{ix} - (\sqrt{2})^n e^{-n\pi i/4} e^{-ix}\}}{2i} \\ &= \frac{(\sqrt{2})^n e^x (e^{i(x+n\pi/4)} - e^{-i(x+n\pi/4)})}{2i} \\ &= (\sqrt{2})^n e^x \sin(x + n\pi/4) \end{aligned}$$

(3) (2) で得られた結果に $x=0$ を代入すると, $f^{(n)}(0) = (\sqrt{2})^n \sin(n\pi/4)$ となるから, 求めるマクローリン展開は, 以下ようになる.

$$e^x \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^n \sin(n\pi/4)}{n!} x^n$$

第4章

問 1 (1) $\frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{3}x^3 + \frac{c}{2}x^2 + dx + C$ (2) $-\frac{1}{x} + C$

(3) $\log|x+1| + C$ (4) $\frac{3}{2}x^2 - 2x + \log|x| + C$

問 2 (1) $\frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{1}{4}x^2 + C$

(2) $I = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x (\sin x - \cos x) - I$ より,

$$I = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C$$

(3) $x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + C$

問 3 (1) $\frac{1}{15}(3x-2)^5 + C$ (2) $-2e^{-\frac{x}{2}} + C$