

まえがき

本書は早稲田大学理工学部，基幹理工学部一年生に対する筆者のここ数年間の授業体験に基づいて書かれた線型代数の入門書である。

2007年に発足した基幹理工学部の一年次の数学教育には，微分積分の授業の他に，基礎数学と線型代数の授業が設けられている。「基礎の数学」は高校と大学の橋渡しの役目をするためのもので，前期に週一回の授業がある。「線型代数」は前期に週一回，後期は演習を含めて週二回のペースで授業が行われる。これらの授業の内容と形態を念頭に置いて本書は構成されている。

第1章から第4章は高校のベクトル含む幾何の内容と大学の線型代数の橋渡しをする部分である。平面ベクトル，空間ベクトルの復習から始めて，線型写像と2次行列と3次行列，複素数と複素平面の幾何学がその内容である。

第5章以降が本格的な線型代数の教程である。第5章で一般次数の行列を導入し，第6章では行列式，そして第7章で行列の標準形と階数，第8章で連立一次方程式を論じる。

ここまでが「行列と行列式論」であるとすれば，第9章からはベクトル空間と線型写像に関する代数学すなわち「線型代数学」が展開される。

第9章で抽象的なベクトル空間と線型写像を導入し，有限次元ベクトル空間における基底の存在，線型写像についての次元定理と線型写像の表現について考察する。これらの議論は初学者にとって抽象的で難解なものであろうが，高次元ベクトル空間を目で見て幾何学を展開するために必要不可欠な枠組みが線型代数学である。第10章では内積空間上のエルミート変換，ユニタリ変換を導入する。それらは正規直交基底による表現行列がエルミート行列，ユニタリ行列となるような線型変換のことである。最後の第11章でエルミート行列とユニタリ行列のユニタリ行列による対角化を証明する。

付録として，「代数学の基本定理」の証明と，「ある行列がユニタリ行列により対角化可能であるための必要十分条件は，その行列が正規行列である」ことの証明を付けた。

ベクトル空間や線型写像といった概念は極めて抽象的なものである。それを一年間の授業で理解するのは決して容易なことではない。それ故に，全般にわたって丁寧な説明を心掛け，また，読者の理解を助けるために多数の問題を配した（巻末に詳しい解答も付した）。

それでも，第10章と第11章のエルミート変換（行列），ユニタリ変換（行列）に関する議論を理解するには多くの努力を要するであろう。読者にはこの関門を乗り越えて第11

章の最後のパラグラフまでたどり着いてほしい。そこまで行けば、ユニタリ行列による対角化が、実は、正規直交基底への正射影（正射影作用素）を重ね合わせたものに他ならないことが自然に了解できるはずである。

高校でベクトルを学習する際に、内積の導入と同時に正射影についても学ぶ。正射影とはそれほど基本的な概念である。それが線型代数学の高度な理論においても基本的役割を果たすことに改めて注意を喚起したい。本書でも随所でさまざまな観点から正射影について考察しており、それが本書の一つの特色となっている。

最後となりましたが、本書の執筆を筆者に勧めて下さった内田老鶴圃社長内田学氏に深甚なる謝意を表すと同時に、筆者の拙い \TeX ファイルを素晴らしい本に仕上げて下さった同社の編集制作部スタッフの皆様に感謝する次第です。

2010年12月

上野 喜三雄

あとがき

本書を読了し、大学一年次での線型代数の教程を学び終えたとしても、それが線型代数のすべてであるはずがない。理学、工学の応用方面に進んだ後、あるいは数学の専門課程では、より深い線型代数の知識が必要となる。そこで、線型代数に関連した書物をいくつか挙げておく。ここで取り上げた書物は、そのようなより深い線型代数の知識の必要なときに、皆さんの座右にあって良き相談相手となる書物である。

- [1] 線型代数学入門：福井常孝，上村外茂男，入江昭二，宮寺功，前原昭二，
境正一郎 内田老鶴圃，1962
- [2] 線型代数学：佐武一郎 裳華房，1958
- [3] 線型代数入門，線型代数演習：齋藤正彦 東京大学出版会，1966
- [4] 演習ベクトル解析：寺田文行，坂田洵，斎藤偵四郎 サイエンス社，1980
- [5] 線型代数：竹之内脩，浅野洋 朝倉書店，1979
- [6] 線型代数：岩井齊良 学術図書出版社，1995
- [7] 線型代数：長谷川浩司 日本評論社，2004
- [8] 代数学：彌永昌吉，布川正巳編 岩波書店，1968
- [9] 加群十話：堀田良之 朝倉書店，1988

[1] は理工系大学初年次で学ぶべき線型代数についての規範的な教科書の一つ。本書においても、第4章，第6章，第8章，付録Aの執筆において参考にした。[2]，[3]も線型代数のスタンダードというべき教科書である。[2]ではジョルダン標準形，テンソル代数などについても論じられている。[3]は，ジョルダン標準形を単因子論を使って議論している。本書を執筆するにあたりさまざまな局面で[3]を参考にした。

[4]はベクトル解析の教科書である。空間ベクトルのことを詳しく論じており，本書の第2章を書くにあたり参考にした。[5]は練習問題を解きながらジョルダン標準形を学ぶことができる教科書である。[6]は一般逆行列やムーア-ペンローズ逆行列の説明に特色がある。[7]は線型代数を，物理学との関連に重きを置きながら，多彩な切り口から論じている。

最後の二冊は線型代数以外の代数学のテーマも扱っている。[8]は数学科の学生が学部時

代に学んでおくべき代数学の要諦を豊富な演習問題とともにまとめている。[9]では単因子論によるジョルダン標準形の議論が著者独特の語り口で分りやすく語られている。